2017年京大文$\boxed{3}$

l 上の点は$\begin{pmatrix} 0 \\ -s \\ s \end{pmatrix}$と表せる。$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$であるから、$m$ 上の点は$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2t \\ 2 \\ 1-4t \end{pmatrix}$と表せる。

m 上の点 $R(-2r,\ 2,\ 1-4r)$ から、l に下ろした垂線の足を、$H(0,\ -h,\ h)$ とする。

$\overrightarrow{RH}=(2r,\ -h-2,\ h+4r-1)$ は、$\overrightarrow{BC}$ と垂直であるから

$$\overrightarrow{RH}\cdot\overrightarrow{BC}=-2\cdot 2r-4(h+4r-1)=-4h-20r+4=0 \qquad \therefore h=-5r+1$$

$H(0,\ 5r-1,\ -5r+1)$ であり、$\overrightarrow{RH}=(2r,\ 5r-3,\ -r)$ である。

H は PQ の中点であり、RH が最小のとき、△PQR の面積も最小である。

$RH^2=4r^2+25r^2-30r+9+r^2=30r^2-30r+9=30\left(r-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}$ より、RH は $r=\dfrac{1}{2}$ のとき最小。

このとき、$R(-1,\ 2,\ -1)$ であり、$RH=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ であるから、△PQR の1辺の長さは　$\sqrt{\dfrac{3}{2}}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$

$R(-1,\ 2,\ -1)$ からの距離が $\sqrt{2}$ であるような l 上の2点が、求める $P,\ Q$ である。

$P(0,\ -p,\ p)$ とすると、$\overrightarrow{RP}=(1,\ -p-2,\ p+1)$ であるから

$$RP^2=1+p^2+4p+4+p^2+2p+1=2p^2+6p+6=2 \qquad 2p^2+6p+4=0$$
$$p^2+3p+2=(p+1)(p+2)=0 \qquad \therefore p=-2,\ -1$$

このうち一方が P、もう一方が Q に対応するから

$P(0,\ 1,\ -1),\ Q(0,\ 2,\ -2),\ R(-1,\ 2,\ -1)$　または　$P(0,\ 2,\ -2),\ Q(0,\ 1,\ -1),\ R(-1,\ 2,\ -1)$　……(答)

※ $P,\ Q$ の座標は、$PH=QH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ から求めてもよい。