

2018年京大理 2文 3共通

$n = 3k$ のとき $n^3 - 7n + 9$ は 3 の倍数。

$n = 3k + 1$ のとき $n^3 - 7n + 9 = (3 \text{ の倍数}) + 1 - 7 + 9 = (3 \text{ の倍数}) + 3 = (3 \text{ の倍数})$

$n = 3k - 1$ のとき $n^3 - 7n + 9 = (3 \text{ の倍数}) - 1 + 7 + 9 = (3 \text{ の倍数}) + 15 = (3 \text{ の倍数})$

すべての整数 n について、 $n^3 - 7n + 9$ は 3 の倍数である。

$n^3 - 7n + 9$ が素数となるならば、3 しかあり得ないから

$$n^3 - 7n + 9 = 3 \quad n^3 - 7n + 6 = 0 \quad (n + 3)(n - 1)(n - 2) = 0$$

$$\therefore n = -3, 1, 2 \dots \dots (\text{答})$$

※素数は自然数だが、 n は負の場合もあり得ることに注意。