2019年京大理 $\boxed{1}$

問1

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos 3\theta = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta = 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\cos 2\theta$ が有理数であるとき、$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ は有理数である。

$\cos 3\theta = \cos\theta\,(4\cos^2\theta - 3)$ であり、$4\cos^2\theta - 3 = 2\cos 2\theta - 1$ は有理数である。

$4\cos^2\theta - 3 \neq 0$ とすると、$\cos\theta = \dfrac{\cos 3\theta}{4\cos^2\theta - 3}$ であり、右辺は有理数である。

ところが、$\cos\theta$ は無理数であるから、矛盾する。したがって、$4\cos^2\theta - 3 = 0$ である。

$\cos^2\theta = \dfrac{3}{4}$ より、$\cos 2\theta = \dfrac{1}{2}$ は有理数であり、$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ は無理数である。求めるθは　$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{6}$ ……(答)

問2

(1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\tan x)'dx = [x\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = \frac{\pi}{4} + [\log|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \log\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 \text{ ……(答)}$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}[\log|1+\sin x| - \log|1-\sin x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = \log\left(\sqrt{2}+1\right) \text{ ……(答)}$$