2019年京大理$\boxed{6}$　※2022. 2. 22 常用対数の値の評価について、記述訂正。

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right), 1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$(1+i)^n+(1-i)^n=2\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}=2^{\frac{n+2}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$$

mを非負整数とする。

$n=8m$のとき　$\cos\frac{n\pi}{4}=\cos 2m\pi=1$　$n=8m+1$ のとき　$\cos\frac{n\pi}{4}=\cos\left(2m\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$n=8m+2$ のとき　$\cos\frac{n\pi}{4}=\cos\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$　$n=8m+3$ のとき　$\cos\frac{n\pi}{4}=\cos\left(2m\pi+\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$n=8m+4$ のとき　$\cos\frac{n\pi}{4}=\cos(2m\pi+\pi)=-1$　$n=8m+5$ のとき　$\cos\frac{n\pi}{4}=\cos\left(2m\pi+\frac{5}{4}\pi\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$n=8m+6$ のとき　$\cos\frac{n\pi}{4}=\cos\left(2m\pi+\frac{3}{2}\pi\right)=0$　$n=8m+7$ のとき　$\cos\frac{n\pi}{4}=\cos\left(2m\pi+\frac{7}{4}\pi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$(1+i)^n+(1-i)^n$が正の値をとるのは、$n=8m, n=8m+1, n=8m+7$ の場合に限られる。

$n=8m$のとき　$(1+i)^n+(1-i)^n=2^{4m+1}>10^{10}$　$(4m+1)\log_{10}2>10$　$m>\frac{5}{2\log_{10}2}-\frac{1}{4}$

常用対数表より $0.30095\leqq\log_{10}2<0.30105$ であるから　$\frac{5}{0.6021}<\frac{5}{2\log_{10}2}\leqq\frac{5}{0.6019}$

$\frac{5}{0.6021}=8.304\cdots$　$\frac{5}{0.6019}=8.307\cdots$　$8.054\cdots<\frac{5}{2\log_{10}2}-\frac{1}{4}\leqq 8.057\cdots$　$\therefore m\geqq 9$　$\therefore n\geqq 72$

$n=8m+1$ のとき　$(1+i)^n+(1-i)^n=2^{4m+1}>10^{10}$　$(4m+1)\log_{10}2>10$

$m>\frac{5}{2\log_{10}2}-\frac{1}{4}$　$\therefore m\geqq 9$　$\therefore n\geqq 73$

$n=8m+7$ のとき　$(1+i)^n+(1-i)^n=2^{4m+4}>10^{10}$　$(4m+4)\log_{10}2>10$

$m>\frac{5}{2\log_{10}2}-1$　$7.304\cdots<\frac{5}{2\log_{10}2}-1\leqq 7.307\cdots$　$\therefore m\geqq 8$　$\therefore n\geqq 71$

以上により、求める最小のnは　$\therefore n=71$　$\cdots\cdots$(答)

※文系と同じ常用対数表がついているが、必要なのは$\log_{10}2$の値だけである。