2019年京大理$\boxed{4}$文$\boxed{4}$共通

1回サイコロを投げて、4以下の目が出る事象をA、5以上の目が出る事象をBと表すことにする。

$k \geqq 2$のとき、$k-1$回目に事象Aが起き、k回目に事象Bが起きたとする。
1回目から$k-1$回目まで事象Aが続く。1回目に事象Bが起きると、$K_0 = 0 \leqq 4, K_1 \geqq 5$となるからである。
k回目に事象Bが起き、以後事象Bが続くか、途中で事象Aになり、以後事象Aが続く。

$k-1$回目まで事象Aが続き、k回目以降$k+i$回目まで事象Bが続き、$k+i+1$回目以降事象Aが続く確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{i+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-i} = \frac{2^{n-i-1}}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \ (0 \leqq i \leqq n-k)$$

これより、ある自然数kにおいて、条件を満たす確率$P(k)$は

$$P(k) = \left(\frac{2}{3}\right)^n\sum_{i=0}^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}\right\} = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n 2^{k-1} \ (1 \leqq k \leqq n)$$

求める確率は、$P(k)$の$k=1$から$k=n$までの和であるから

$$n\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\sum_{k=1}^{n}2^{k-1} = n\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n(2^n-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^n + (n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n \ \cdots\cdots(答)$$

※題意を読み取りにくい上に、なぜ$K_0 = 0$としているのかを見落としやすいと思われる。