2020年京大文$\boxed{3}$

m, nが共に奇数であるとき、mn^2, am^2, n^2は奇数であり、$f(m, n)$は奇数である。
m, nの一方が奇数、一方が偶数であるとき、mn^2は偶数であり、am^2, n^2の一方は奇数でもう一方は偶数であるから、$f(m, n)$は奇数である。

$f(m, n)$が16で割り切れるには、m, nが共に偶数である必要があるから、$m = 2k, n = 2l$とおく。

$$f(m, n) = 8kl^2 + 4ak^2 + 4l^2 + 8 = 4(2kl^2 + ak^2 + l^2 + 2)$$

$2kl^2 + ak^2 + l^2 + 2$が4で割り切れるから、$2kl^2 + ak^2 + l^2 + 2$は偶数であり、$ak^2 + l^2$は偶数である。
k, lは共に偶数であるか、共に奇数である。

k, lが共に偶数であるとき、$k = 2p, l = 2q$とおく。

$$f(m, n) = 4(16pq^2 + 4ap^2 + 4q^2 + 2) = 8(8pq^2 + 2ap^2 + 2q^2 + 1)$$

このとき、$8pq^2 + 2ap^2 + 2q^2 + 1$は奇数であるから、$f(m, n)$は16で割り切れない。

k, lが共に奇数であるとき、$2kl^2 + ak^2 + l^2 + 2 = 2(kl^2 + 1) + ak^2 + l^2$であり、$kl^2 + 1$は偶数であるから、$2(kl^2 + 1)$は$4$で割り切れる。$ak^2 + l^2$が$4$で割り切れる条件を考える。
$k = 2p - 1, l = 2q - 1$とおくと

$$ak^2 + l^2 = a(2p - 1)^2 + (2q - 1)^2 = 4(ap^2 - ap + q^2 - q) + a + 1$$

これより、$a + 1$が4で割り切れればよい。

求める条件は、$a = 4b - 1$と表されることである。……(答)

このとき、$m = 4p - 2, n = 4q - 2$であれば、$f(m, n)$は16で割り切れる。