2020 年京大理 $\boxed{1}$

（＊）は実数係数の 3 次方程式であるから、解の 1 つは実数解であり、他の 2 解は共役な複素数である。
3 つの解を、$\alpha,\beta,\overline{\beta}$とおく。$\alpha$は実数、$\beta$は実数ではない複素数である。

解と係数の関係より

$\alpha+\beta+\overline{\beta}=-3a$ ――① $\alpha(\beta+\overline{\beta})+|\beta|^2=b$ ――② $\alpha|\beta|^2=-1$ ――③

3 つの解が複素数平面上でなす正三角形は、半径aの円に内接しており、その重心は円の中心と一致する。

重心は複素数平面上で$\dfrac{\alpha+\beta+\overline{\beta}}{3}=-a$で表される。$|\alpha+a|=a$より、$\alpha=-2a$または$\alpha=0$であるが、

③より$\alpha=0$は不適であり、$\alpha=-2a$である。

①に代入すると$\beta+\overline{\beta}=-a$であるから、$\beta$の実数部分は$\dfrac{\beta+\overline{\beta}}{2}=-\dfrac{a}{2}$である。

$\beta=-\dfrac{a}{2}+qi$とすると、$|\beta+a|=\left|\dfrac{a}{2}+qi\right|=a$より　$\dfrac{a^2}{4}+q^2=a^2$　$q^2=\dfrac{3}{4}a^2$　$\therefore q=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$\alpha=-2a,\beta=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)a$としてよいから、③に代入すると　$\alpha|\beta|^2=-2a^3=-1$　$a^3=\dfrac{1}{2}$　$\therefore a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

②に代入して　$\therefore b=(-2a)(-a)+a^2=3a^2=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$

以上により　$a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},b=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$　3 つの解は$-\sqrt[3]{4},\dfrac{\sqrt[3]{4}}{4}\left(-1\pm\sqrt{3}i\right)$ ……(答)

※2003 年京大後期理 $\boxed{3}$ によく似ている。