2020 年京大理 $\boxed{2}$

(1)

$x^2-2px-1=0$を解くと　$x=p\pm\sqrt{p^2+1}$　$|\alpha|>1$より　$\alpha=p+\sqrt{p^2+1},\ \beta=p-\sqrt{p^2+1}$

$X_n=\alpha^n+\beta^n$とする。解と係数の関係より、$X_1=\alpha+\beta=2p$は偶数。$\alpha\beta=-1$であるから、

$X_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4p^2+2$は偶数。

$n\geqq 2$とする。$2pX_n=(\alpha^n+\beta^n)(\alpha+\beta)=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\alpha\beta(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})=X_{n+1}-X_{n-1}$より

$\therefore X_{n+1}=2pX_n+X_{n-1}$

上記の漸化式により、X_1,X_2は偶数であるから、以下帰納的に、X_nは偶数である。（証明終）

(2)

$\sin(\alpha^n\pi)=\sin\{(X_n-\beta^n)\pi\}=\sin(X_n\pi)\cos(\beta^n\pi)-\cos(X_n\pi)\sin(\beta^n\pi)$

X_nは偶数より、$\sin(X_n\pi)=0,\cos(X_n\pi)=1$であるから　$\therefore \sin(\alpha^n\pi)=-\sin(\beta^n\pi)$

$$(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)=-(-\alpha)^n\sin(\beta^n\pi)=-(-\alpha)^n\beta^n\pi\cdot\frac{\sin(\beta^n\pi)}{\beta^n\pi}=-(-\alpha\beta)^n\pi\cdot\frac{\sin(\beta^n\pi)}{\beta^n\pi}=-\pi\cdot\frac{\sin(\beta^n\pi)}{\beta^n\pi}$$

ここで、$\beta=-\dfrac{1}{p+\sqrt{p^2+1}}$ であり、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\beta^n=0$ であるから　$\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)=-\pi$ ……(答)