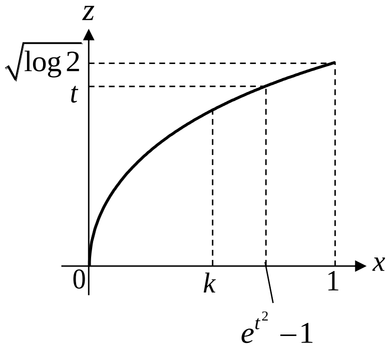
2020年京大理$\boxed{6}$



$z=\sqrt{\log(x+1)}$は単調増加な関数である。Sの$x=k(0\leqq k\leqq 1)$による切り口を考える。Sのyz平面への正射影を考えると、$x=k$のとき、$\sqrt{\log(k+1)}\leqq z\leqq\sqrt{\log 2}$である。

$z=t\left(\sqrt{\log(k+1)}\leqq t\leqq\sqrt{\log 2}\right)$のとき、$x=e^{t^2}-1$であるから、

Sの$z=t$による切り口は、円$x^2+y^2=\left(e^{t^2}-1\right)^2$である。

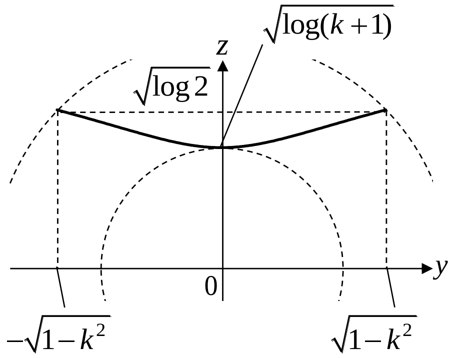
この円と、$x=k$との交点は、$\left(k,\pm\sqrt{\left(e^{t^2}-1\right)^2-k^2},t\right)$であるから、

$y=\pm\sqrt{\left(e^{t^2}-1\right)^2-k^2}, z=t$より$t$を消去して

$$y^2+k^2=\left(e^{z^2}-1\right)^2 \quad e^{z^2}=\sqrt{y^2+k^2}+1$$

$$\therefore z=\sqrt{\log\left(\sqrt{y^2+k^2}+1\right)}\ \left(\sqrt{\log(k+1)}\leqq z\leqq\sqrt{\log 2}\right)$$

この曲線はz軸対称であり、$y=0$で最小である。



$x=k$において、この曲線上の点とx軸との最短距離は$\sqrt{\log(k+1)}$であり、最長距離は$\sqrt{\log 2+(1-k^2)}$である。

Vの$x=k$による断面の形状はドーナツ形になり、面積は

$$\pi\{\log 2+1-k^2-\log(k+1)\}$$

対称性より、Vの体積は

$$2\pi\int_0^1\{\log 2+1-k^2-\log(k+1)\}dk$$

$$=2\pi\left[(\log 2+1)k-\frac{k^3}{3}-(k+1)\log(k+1)+k\right]_0^1=2\pi\left(\log 2+1-\frac{1}{3}-2\log 2+1\right)$$

$$=2\pi\left(\frac{5}{3}-\log 2\right)\cdots\cdots(答)$$

※2017年東大理$\boxed{6}$に似ているが、切り口の曲線の増減や凹凸まで厳密に論証しなくてよいのでは。