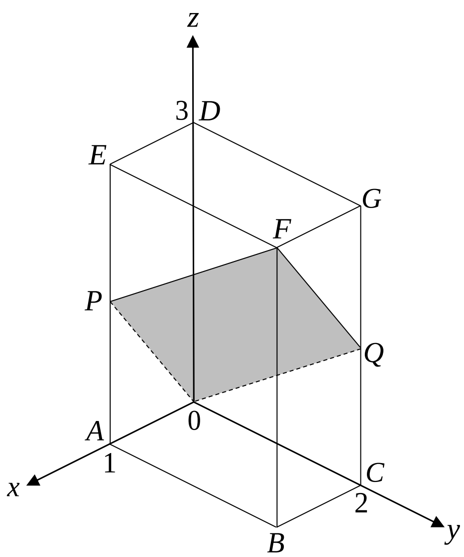
2021 年京大文 $\boxed{4}$




$P(1,0,p), Q(0,2,q)$とする。

4 点$O, F, P, Q$が同一平面上にあるとき、$\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{QF}$である。

$\overrightarrow{OP} = (1, 0, p), \overrightarrow{QF} = (1, 0, 3-q)$

$\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{QF}$となる条件は　$p = 3 - q$　$\therefore p + q = 3$

このとき、四角形$OPFQ$は平行四辺形であるから、面積$S$は

$$S = \sqrt{\left|\overrightarrow{OP}\right|^2\left|\overrightarrow{OQ}\right|^2 - \left(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\right)^2} = \sqrt{(1+p^2)(4+q^2) - p^2q^2}$$

$$= \sqrt{4 + 4p^2 + q^2} = \sqrt{4 + 4p^2 + (3-p)^2} = \sqrt{5p^2 - 6p + 13}$$

$$= \sqrt{5\left(p - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{56}{5}}$$

$0 \leqq p \leqq 3$ であり、$S$は$p = \dfrac{3}{5}$のとき最小になる。

求める$P, Q$の座標は　$P\left(1, 0, \dfrac{3}{5}\right), Q\left(0, 2, \dfrac{12}{5}\right)$ ……(答)

このとき　$S = \sqrt{\dfrac{56}{5}} = \dfrac{2\sqrt{70}}{5}$ ……(答)