

2021 年京大理 1

問 1

$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2)$ であり、平面 α 上の点は $\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC} = (1 - p - q, -p, 2q)$ とおける。

$M(1 - p - q, -p, 2q)$ とおくと、 $\overrightarrow{PM} = (-p - q, -1 - p, -1 + 2q)$ である。

$$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ より } p + q + 1 + p = 2p + q + 1 = 0 \text{ ——①}$$

$$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \text{ より } p + q - 2 + 4q = p + 5q - 2 = 0 \text{ ——②}$$

$$\text{①、②より } p = -\frac{7}{9}, q = \frac{5}{9} \text{ したがって } \therefore M\left(\frac{11}{9}, \frac{7}{9}, \frac{10}{9}\right)$$

$$Q(x, y, z) \text{ とすると } \frac{1+x}{2} = \frac{11}{9}, \frac{1+y}{2} = \frac{7}{9}, \frac{1+z}{2} = \frac{10}{9} \quad x = \frac{13}{9}, y = \frac{5}{9}, z = \frac{11}{9}$$

$$\text{求める座標は } \therefore Q\left(\frac{13}{9}, \frac{5}{9}, \frac{11}{9}\right) \text{ …… (答)}$$

問 2

$n - 1$ 回目の試行までに、赤を除く 3 色すべてが少なくとも 1 回記録される。

$n - 1$ 回目の試行まで、赤を除く 3 色のいずれかが記録されるのは、 3^{n-1} 通り。

$n - 1$ 回目の試行まで、赤を除く 3 色のうち、いずれか 1 色のみが記録されるのは、3 通り。

$n - 1$ 回目の試行まで、赤を除く 3 色のうち、いずれか 2 色のみが記録されるのは、 $3(2^{n-1} - 2)$ 通り。

$n - 1$ 回目の試行までに、赤を除く 3 色すべてが少なくとも 1 回記録されるのは、

$$\therefore 3^{n-1} - 3 - 3(2^{n-1} - 2) = 3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + 3 \text{ 通り}$$

$n - 1$ 回目の試行までの記録の総数は、 4^{n-1} 通りであるから、求める確率は

$$\therefore \frac{3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + 3}{4^{n-1}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + 3}{4^n} \text{ …… (答)}$$