2021 年京大理 $\boxed{2}$

$P\left(t, \frac{1}{2}(t^2+1)\right)$とすると、$P$における接線の方程式は　$y = t(x-t) + \frac{1}{2}(t^2+1) = tx - \frac{1}{2}(t^2-1)$

これはx軸と交わるから、$t \neq 0$ として、$Q\left(\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right), 0\right)$となる。

$$L^2 = \left\{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right\}^2 + \left\{\frac{1}{2}(t^2+1)\right\}^2 = \frac{1}{4}\left(t^2+2+\frac{1}{t^2}+t^4+2t^2+1\right) = \frac{1}{4}\left(t^4+3t^2+\frac{1}{t^2}+3\right)$$

$f(t) = \frac{1}{4}\left(t^4+3t^2+\frac{1}{t^2}+3\right)$とすると

$$f'(t) = \frac{1}{4}\left(4t^3+6t-\frac{2}{t^3}\right) = \frac{2t^6+3t^4-1}{2t^3} = \frac{(2t^2-1)(t^4+2t^2+1)}{2t^3} = \frac{\left(\sqrt{2}t+1\right)\left(\sqrt{2}t-1\right)(t^2+1)^2}{2t^3}$$

$f(t)$の増減は右の通りで、$t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$のとき極小。

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+2+3\right) = \frac{27}{16}$$

t	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
$f(t)$	↘		↗		↘		↗

求めるLの最小値は　$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{4}$ $\cdots\cdots$(答)