2021 年京大理$\boxed{3}$

$z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}+i}{4}$とする。$z^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$である。

$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}z^k$とすると、$S_n=\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\frac{k\pi}{6}\right\}+i\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\sin\frac{k\pi}{6}\right\}$である。

部分和$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\frac{k\pi}{6}$は、$S_n$の実数部分として与えられる。

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}z^k=\frac{1-z^n}{1-z}=\frac{1}{1-z}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6}-i\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{6}\right\}$$

$$\frac{1}{1-z}=\frac{4}{4-\sqrt{3}-i}=\frac{4\left(4-\sqrt{3}+i\right)}{\left(4-\sqrt{3}\right)^2+1}=\frac{4\left(4-\sqrt{3}+i\right)}{20-8\sqrt{3}}=\frac{4-\sqrt{3}+i}{5-2\sqrt{3}}=\frac{\left(4-\sqrt{3}+i\right)\left(5+2\sqrt{3}\right)}{25-12}$$

$$=\frac{\left(4-\sqrt{3}\right)\left(5+2\sqrt{3}\right)}{13}+i\frac{5+2\sqrt{3}}{13}=\frac{14+3\sqrt{3}}{13}+i\frac{5+2\sqrt{3}}{13}$$

$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\frac{k\pi}{6}=\frac{14+3\sqrt{3}}{13}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6}\right\}+\frac{5+2\sqrt{3}}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{6}$となる。

$-\left(\frac{1}{2}\right)^n\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6}\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^n,-\left(\frac{1}{2}\right)^n\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{6}\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^n$であるから、はさみうちの原理により

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6}=0,\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{6}=0$$

$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\frac{k\pi}{6}=\frac{14+3\sqrt{3}}{13}\cdots\cdots(答)$$

※nを 6 で割った余り、または 12 で割った余りで場合分けしても解けなくはないが…。