2021 年京大理 $\boxed{5}$

(1)

円周角の定理により、点Aは、BCを弦とする円上を動く。△ABCの外心は、この円の中心に等しい。

正弦定理より、この円の半径をRとすると　$2R=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=4$　$\therefore R=2$

△ABCの外心は、BCの垂直二等分線上、すなわちy軸上にあるので、座標を$P(0,p)$とおく。

$PB=PC=2$より　$3+(p+1)^2=4$　$(p+1)^2=1$　$\therefore p=-2,0$

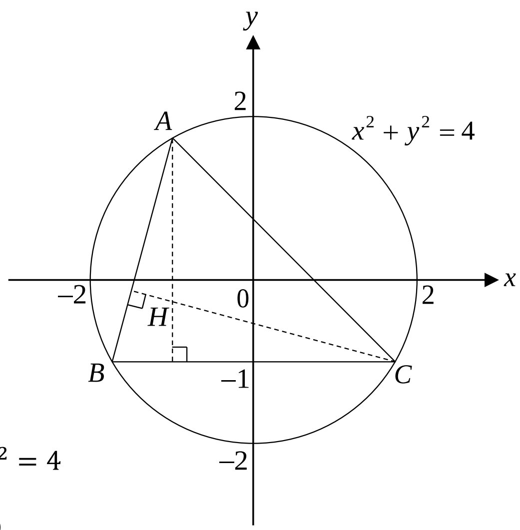
$p=-2$のとき、△ABCの外接円の方程式は$x^2+(y+2)^2=4$となるが、このとき常に$y\leqq 0$であるから、不適。

したがって$p=0$であり、求める外心の座標は　$\therefore (0,0)$ ……(答)

(2)

△ABCの外接円の方程式は$x^2+y^2=4$であり、点Aはこの円の$y>0$の部分を動く。

点$A(2\cos\theta,2\sin\theta)$ $(0<\theta<\pi)$とおき、△ABCの垂心を$H(X,Y)$とする。



HはAからBCに下した垂線上にあるから　$X=2\cos\theta$ ——①

$BA\perp CH$であるから

$$\overrightarrow{BA}=\left(2\cos\theta+\sqrt{3},2\sin\theta+1\right),\overrightarrow{CH}=\left(2\cos\theta-\sqrt{3},Y+1\right)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CH}&=4\cos^2\theta-3+(2\sin\theta+1)(Y+1)\\&=1-4\sin^2\theta+(1+2\sin\theta)(Y+1)\\&=(1+2\sin\theta)(2-2\sin\theta+Y)=0\end{aligned}$$

$\sin\theta>0$より　$2-2\sin\theta+Y=0$　$\therefore Y=2\sin\theta-2$ ——②

①、②より　$\cos^2\theta+\sin^2\theta=\dfrac{X^2}{4}+\dfrac{(Y+2)^2}{4}=1$　$\therefore X^2+(Y+2)^2=4$

Hの軌跡は、円$x^2+(y+2)^2=4$の$y>-2$の部分である。……(答)