2021年京大理$\boxed{6}$

問1

「3^n-2^nが素数ならば、nは素数である」の対偶は「nが素数ではないならば、3^n-2^nは素数ではない」であるから、これを示す。

nが素数ではないとき、$n=pq$と書ける。p,qは1ではない正の整数である。このとき

$$3^{pq}-2^{pq}=(3^p-2^p)\left(3^{p(q-1)}+3^{p(q-2)}\cdot 2^p+\cdots+3^p\cdot 2^{p(q-2)}+2^{p(q-1)}\right)$$

$3^p-2^p, 3^{p(q-1)}+3^{p(q-2)}\cdot 2^p+\cdots+3^p\cdot 2^{p(q-2)}+2^{p(q-1)}$は1ではないから、$3^{pq}-2^{pq}$は素数ではない。

以上により示された。（証明終）

（注）

「3^n-2^nが素数ならば、nは素数である」の逆「nが素数ならば、3^n-2^nは素数である」は成り立たない。

例えば$n=7$のとき、$3^7-2^7=2059=29\cdot 71$であり、素数ではない。

問2

$f(x)$が微分可能であるとき、曲線$y=f(x)$上の点$\left(t,f(t)\right)$における接線の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)=f'(t)x+f(t)-tf'(t)$$

これが原点を通るとき、$f(t)-tf'(t)=0$である。$f(t)-tf'(t)=0$を満たす実数tが存在することを示す。

$x>0$において、関数$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$を定義する。

平均値の定理により、$\dfrac{g(a)-g(1)}{a-1}=g'(u), 1\leqq u\leqq a$を満たす実数$u$が存在する。

ここで　$\dfrac{g(a)-g(1)}{a-1}=\dfrac{\frac{f(a)}{a}-f(1)}{a-1}=\dfrac{f(1)-f(1)}{a-1}=0$　$g'(u)=\dfrac{f'(u)\cdot u-f(u)}{u^2}$　$\therefore f(u)-uf'(u)=0$

したがって、$f(t)-tf'(t)=0$を満たす実数tとして、$t=u$が存在するから、題意は示された。（証明終）