2021 年京大理$\boxed{3}$

$n^4+2=(n^2+2)(n^2-2)+6$であり、n^2+2はA_nで割り切れるから、6はA_nで割り切れる。
すなわち、A_nは6の正の約数であるから、1,2,3,6のいずれかである。
このとき、$n^6+2=(n^2+2)(n^4-2n^2+4)-6$も$A_n$で割り切れる。

$n=6k\pm1$のとき

$n^2+2=\left(6\text{ の倍数}\right)+1+2=6p+3=3(2p+1)=3\times\left(\text{奇数}\right)$

同様に、$n^4+2,\ n^6+2$も$3\times\left(\text{奇数}\right)$という形になるから　$\therefore A_n=3$

$n=6k\pm2$のとき

$n^2+2=\left(6\text{ の倍数}\right)+4+2=\left(6\text{ の倍数}\right)+6=\left(6\text{ の倍数}\right)$

$n^4+2=\left(6\text{ の倍数}\right)+16+2=\left(6\text{ の倍数}\right)+18=\left(6\text{ の倍数}\right)$

$n^6+2=\left(6\text{ の倍数}\right)+64+2=\left(6\text{ の倍数}\right)+66=\left(6\text{ の倍数}\right)$

$\therefore A_n=6$

$n=6k-3$のとき

$n^2+2=\left(6\text{ の倍数}\right)+9+2=\left(6\text{ の倍数}\right)+11=\left(6\text{ の倍数}\right)+5$

$n^4+2=\left(6\text{ の倍数}\right)+81+2=\left(6\text{ の倍数}\right)+83=\left(6\text{ の倍数}\right)+5$

$n^6+2=\left(6\text{ の倍数}\right)+729+2=\left(6\text{ の倍数}\right)+731=\left(6\text{ の倍数}\right)+5$

$\therefore A_n=1$

$n=6k$のとき

$n^2+2=\left(6\text{ の倍数}\right)+2=6p+2=2(3p+1)=2\times\left(3\text{ の倍数でない数}\right)$

同様に、$n^4+2,\ n^6+2$も$2\times\left(3\text{ の倍数でない数}\right)$という形になるから　$\therefore A_n=2$

以上により、nを6で割った余りが

0 のとき$A_n=2$　1 か 5 のとき$A_n=3$　2 か 4 のとき$A_n=6$　3 のとき$A_n=1$ ……(答)