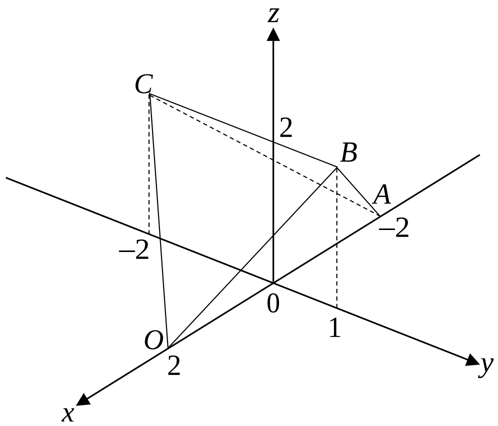
2022年京大理$\boxed{4}$文$\boxed{5}$共通



空間座標系において、$O(2,0,0),\ A(-2,0,0)$と定める。

$OB=AB,\ OC=AC$より、$OA\perp BC$である。

BCを含み、OAに垂直な平面は、OAの中点を通る。

$B(0,y,z), C(0,y-3,z)\ (y>0, z>0)$とする。$OB=AB=3$より

$2^2+y^2+z^2=3^2 \quad \therefore y^2+z^2=5$ ―― ①

$OC=AC=2\sqrt{3}$より

$2^2+(y-3)^2+z^2=12 \quad \therefore y^2+z^2-6y+1=0$ ―― ②

②に①を代入して　$6-6y=0 \quad \therefore y=1, z=2$

以上により、$B(0,1,2), C(0,-2,2)$と定まった。

(1)

$P(0,y,2)\ (-2\leqq y\leqq 1)$とおける。$P$の位置に関わらず、$OP=AP$であり、$\triangle OAP$は二等辺三角形である。

OAの中点を$M(0,0,0)$とすると、PMはyz平面に含まれ、$\overrightarrow{PM}\perp\overrightarrow{OA}$である。

GはPM上の$PG=\dfrac{2}{3}PM$となる位置にあるから　$\therefore \overrightarrow{PG}\perp\overrightarrow{OA}$ (証明終)

(2)

$PM=\sqrt{y^2+4}$であり、PMが最小のときPGも最小である。

PMは$y=0$のとき最小値2をとるから、PGの最小値は　$\dfrac{2}{3}\times 2=\dfrac{4}{3}$ ……(答)