2022年京大理 $\boxed{6}$

$x_1=0 \quad x_2=0+1+2=3 \quad x_3=3+2+2\cos(2\pi)=7$

$x_4=7+3+2\cos\left(\frac{14\pi}{3}\right)=10+2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=9 \quad x_5=9+4+2\cos(6\pi)=15$

$x_6=15+5+2\cos(10\pi)=22$

nが3の倍数でないとき、x_nは3の倍数であり、nが3の倍数であるとき、x_nを3で割った余りは1であると予想できるので、これを示す。

$n=3m$のとき、$x_{3m}=3k+1$とする。

$x_{3m+1}=3k+1+3m+2\cos\left\{\frac{2\pi(3k+1)}{3}\right\}=3k+1+3m-1=3(k+m)$

$x_{3m+2}=3(k+m)+3m+1+2=3(k+m)+3m+3=3(k+2m+1)$

$x_{3m+3}=3(k+2m+1)+3m+2+2=3(k+2m+1)+3m+4=3(k+3m+2)+1$

したがって、$n=3m+1,\ 3m+2,\ 3m+3$においても成立。

nが 3 の倍数でないとき、x_nは 3 の倍数であるから　$\cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right)=1 \quad \therefore x_{n+1}=x_n+n+2$

nが 3 の倍数であるとき、x_nを 3 で割った余りは 1 であるから　$\cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right)=-\frac{1}{2} \quad \therefore x_{n+1}=x_n+n-1$

また、y_nの定義により、nが3の倍数でないとき$y_{n+1}=y_n+2$、nが3の倍数であるとき$y_{n+1}=y_n-1$である。

これらにより、すべての自然数nについて　$\therefore x_{n+1}-y_{n+1}=x_n-y_n+n$

$z_n=x_n-y_n$とする。$y_1=0$より、$z_1=0$であるから

$$\sum_{k=1}^{n-1}(z_{k+1}-z_k)=z_n=\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}$$

求める数列$\{x_n-y_n\}$の一般項は　$\therefore x_n-y_n=\frac{n(n-1)}{2}$ ⋯⋯(答)