

2022 年京大理 Ⅰ 文 Ⅰ 共通

$4^{5.4} < 2022 < 4^{5.5}$ を示せばよい。

$2022 < 2048 = 2^{11} = 4^{5.5}$ であるから、 $2022 < 4^{5.5}$ は成立。

$4^{5.4} < 2000$ を示す。

$$\frac{4^{5.4}}{2000} = \frac{2^{10.8}}{2^4 \cdot 5^3} = \frac{2^{6.8}}{5^3} \quad \log_{10} \frac{2^{6.8}}{5^3} = 6.8 \log_{10} 2 - 3 \log_{10} 5 = 6.8 \log_{10} 2 - 3(1 - \log_{10} 2) = 9.8 \log_{10} 2 - 3$$

$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ より $2.9498 < 9.8 \log_{10} 2 < 2.95078 \quad \therefore 9.8 \log_{10} 2 - 3 < 0$

$$\log_{10} \frac{2^{6.8}}{5^3} < 0 \quad \frac{2^{6.8}}{5^3} = \frac{4^{5.4}}{2000} < 1 \quad \therefore 4^{5.4} < 2000 < 2022$$

以上により、 $4^{5.4} < 2022 < 4^{5.5}$ が示されたので $\therefore 5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ (証明終)