

2023 年京大文 3

(1)

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \dots\dots (\text{答})$$

$$\cos 3\theta = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta = (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \dots\dots (\text{答})$$

(2)

半径 1 の円に内接する正五角形の一辺の長さを a とすると、余弦定理より

$$a^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{2}{5}\pi = 2 - 2 \cos \frac{2}{5}\pi$$

$$\theta = \frac{2}{5}\pi \text{ とすると } 5\theta = 2\pi \quad 3\theta = 2\pi - 2\theta \quad \cos 3\theta = \cos(2\pi - 2\theta) = \cos 2\theta$$

$$(1) \text{ より } 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \quad 4 \cos^3 \theta - 2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta + 1 = 0$$

$$(\cos \theta - 1)(4 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 1) = 0 \quad \cos \theta \neq 1 \text{ より } 4 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 1 = 0$$

$$0 < \cos \theta < 1 \text{ より } \cos \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad a^2 = 2 - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

$$2.2^2 = 4.84, 2.3^2 = 5.29 \text{ より } 2.2 < \sqrt{5} < 2.3 \text{ であるから } a^2 > \frac{5 - 2.3}{2} = 1.35$$

$$1.15^2 = 1.3225 \text{ より } a^2 > 1.35 > 1.15^2 \quad \therefore a > 1.15 \dots\dots (\text{答})$$