2023 年京大理 $\boxed{4}$

$g(x)=e^{-x^2}+\dfrac{1}{4}x^2+1$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における増減を調べる。

$$g'(x)=-2xe^{-x^2}+\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x(1-4e^{-x^2})$$

$0\leqq x^2\leqq 1$ であるから　$e^{-1}\leqq e^{-x^2}\leqq 1$　$1<4e^{-1}\leqq 4e^{-x^2}\leqq 4$　$\therefore 1-4e^{-x^2}<0$

$g(x)$の増減は右の通りで、$x=0$ のとき極大。

$g(x)$の最大値は$g(0)=2$、最小値は$g(\pm 1)=e^{-1}+\dfrac{5}{4}$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$F(X)=X+\dfrac{1}{X}$ の$e^{-1}+\dfrac{5}{4}\leqq X\leqq 2$ における増減を調べる。　$F'(X)=1-\dfrac{1}{X^2}=\dfrac{X^2-1}{X^2}$

$e^{-1}+\dfrac{5}{4}\leqq X\leqq 2$ のとき$X>1$ で、$F'(X)>0$ であるから単調増加。

$$F\left(e^{-1}+\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{e}+\frac{5}{4}+\frac{1}{\frac{1}{e}+\frac{5}{4}}=\frac{4+5e}{4e}+\frac{4e}{4+5e}\quad F(2)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

以上により　$f(x)$の最大値は$\dfrac{5}{2}$、最小値は$\dfrac{4+5e}{4e}+\dfrac{4e}{4+5e}$　$\cdots\cdots$(答)