

2023 年京大理 5

点Pをx軸上の $x \geq 0$ の範囲、点Qをy軸上の $y \geq 0$ の範囲に固定して考える。

$P(p, 0) (0 \leq p \leq 1)$ とすると、 $Q(0, 1-p)$ と書ける。

直線PQの方程式は $y = 1 - p - \frac{1-p}{p}x$

整理すると $py = p(1-p) - (1-p)x \quad p^2 + (y-x-1)p + x = 0$

$f(p) = p^2 + (y-x-1)p + x$ としたとき、 $f(p) = 0$ が $0 \leq p \leq 1$ の範囲に解を持つ条件を考える。

$x \geq 0, y \geq 0$ の範囲で考えるので $f(0) = x \geq 0, f(1) = 1 + y - x - 1 + x = y \geq 0$

$f(p) = 0$ が $0 \leq p \leq 1$ の範囲に解を持つ条件は

軸について $0 \leq \frac{x-y+1}{2} \leq 1 \quad 0 \leq x-y+1 \leq 2 \quad \therefore x-1 \leq y \leq x+1$ —①

$D = (y-x-1)^2 - 4x \geq 0 \quad y-x-1 \leq -2\sqrt{x}, 2\sqrt{x} \leq y-x-1$

$2\sqrt{x} \leq y-x-1$ のとき $y \geq x+2\sqrt{x}+1 = (1+\sqrt{x})^2 \geq 1$ であるが、 $y \leq 1$ より不適。

$y-x-1 \leq -2\sqrt{x}$ のとき $y \leq x-2\sqrt{x}+1 = (1-\sqrt{x})^2$ —②

$g(x) = (1-\sqrt{x})^2$ とすると $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \quad 0 < x \leq 1$ の範囲で $g'(x) \leq 0$ であり、単調減少。

$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ かつ②の範囲を図示すると右図の通り。

境界線を含む。これは①も満たす。

対称性より、求める体積Vは、右図の範囲をx軸中心に回転してできる立体の体積の2倍である。

$$V = 2\pi \int_0^1 (1-\sqrt{x})^4 dx$$

$t = 1-\sqrt{x}$ とすると $x = (1-t)^2 \quad dx = 2(t-1)dt$

$$V = 2\pi \int_1^0 t^4 \cdot 2(t-1)dt = 4\pi \int_0^1 (t^4 - t^5)dt = 4\pi \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{6} \right]_0^1 = 4\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{15}\pi \dots\dots (\text{答})$$

※線分PQが通過する領域の包絡線は、 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ で与えられる有名曲線で、放物線の一部である。

