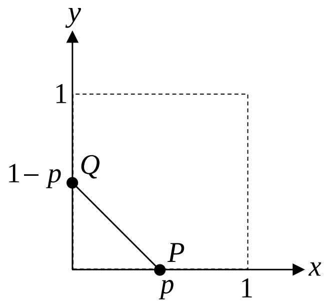
2023 年京大理 $\boxed{5}$

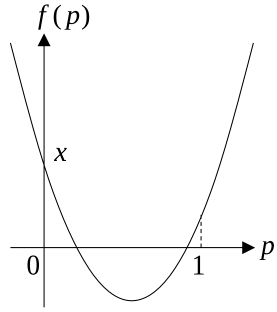


点Pをx軸上の$x \geqq 0$ の範囲、点Qをy軸上の$y \geqq 0$ の範囲に固定して考える。
$P(p,0)(0 \leqq p \leqq 1)$とすると、$Q(0,1-p)$と書ける。

直線PQの方程式は　$y = 1 - p - \dfrac{1-p}{p}x$

整理すると　$py = p(1-p) - (1-p)x$　$p^2 + (y-x-1)p + x = 0$

$f(p) = p^2 + (y-x-1)p + x$としたき、$f(p) = 0$ が $0 \leqq p \leqq 1$ の範囲に解を持つ条件を考える。
$x \geqq 0, y \geqq 0$ の範囲で考えるので　$f(0) = x \geqq 0, f(1) = 1 + y - x - 1 + x = y \geqq 0$



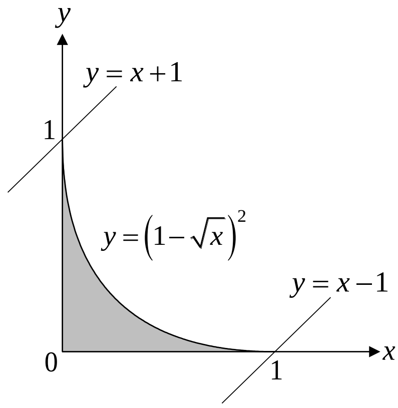
$f(p) = 0$ が $0 \leqq p \leqq 1$ の範囲に解を持つ条件は

軸について　$0 \leqq \dfrac{x-y+1}{2} \leqq 1$　$0 \leqq x - y + 1 \leqq 2$　$\therefore x - 1 \leqq y \leqq x + 1$ ――①

$D = (y-x-1)^2 - 4x \geqq 0$　$y - x - 1 \leqq -2\sqrt{x}, 2\sqrt{x} \leqq y - x - 1$

$2\sqrt{x} \leqq y - x - 1$ のとき　$y \geqq x + 2\sqrt{x} + 1 = \left(1+\sqrt{x}\right)^2 \geqq 1$ であるが、$y \leqq 1$ より不適。
$y - x - 1 \leqq -2\sqrt{x}$のとき　$y \leqq x - 2\sqrt{x} + 1 = \left(1-\sqrt{x}\right)^2$ ――②

$g(x) = \left(1-\sqrt{x}\right)^2$とすると　$g'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$　$0 < x \leqq 1$ の範囲で$g'(x) \leqq 0$ であり、単調減少。



$0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1$ かつ②の範囲を図示すると右図の通り。
境界線を含む。これは①も満たす。

対称性より、求める体積Vは、右図の範囲をx軸中心に回転してできる
立体の体積の 2 倍である。

$$V = 2\pi \int_0^1 \left(1-\sqrt{x}\right)^4 dx$$

$t = 1 - \sqrt{x}$とすると　$x = (1-t)^2$　$dx = 2(t-1)dt$

$$V = 2\pi \int_1^0 t^4 \cdot 2(t-1)dx = 4\pi \int_0^1 (t^4 - t^5)dx = 4\pi \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{6}\right]_0^1 = 4\pi\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{15}\pi \cdots\cdots (答)$$

※線分PQが通過する領域の包絡線は、$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ で与えられる有名曲線で、放物線の一部である。