2023 年京大理 $\boxed{6}$

(1)

$\cos 3\theta = \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta = (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ ……(答)

$\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 = 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1 = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$ ……(答)

(2)

$\cos 1\cdot\theta = \cos\theta \quad \sin 1\cdot\theta = \sin\theta\cdot 1 \quad \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \quad \sin 2\theta = \sin\theta\,(2\cos\theta)$

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \quad \sin 3\theta = \sin 2\theta\cos\theta + \sin\theta\cos 2\theta = \sin\theta\,(4\cos^2\theta - 1)$

$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 \quad \sin 4\theta = 2\sin 2\theta\cos 2\theta = \sin\theta\,(8\cos^3\theta - 4\cos\theta)$

nを自然数とするとき、以下を示す。

① n次多項式$f_n(x)$と$n-1$次多項式$g_n(x)$を用いて、$\cos n\theta = f_n(\cos\theta), \sin n\theta = \sin\theta\, g_n(\cos\theta)$と表せる。

② n次多項式$f_n(x)$と$n-1$次多項式$g_n(x)$の最高次の係数は2^{n-1}であり、その他の係数は整数である。

$n = 1, 2, 3, 4$のとき成立。

$n = k$のとき、$f_k(x) = 2^{k-1}x^k + a(x), g_k(x) = 2^{k-1}x^{k-1} + b(x)$と仮定する。

$a(x)$は$k-1$次以下の多項式、$b(x)$は$k-2$次以下の多項式で、すべての係数が整数とする。

$$\begin{aligned}\cos(k+1)\theta &= \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta = \cos\theta\, f_k(\cos\theta) - \sin^2\theta\, g_k(\cos\theta)\\ &= 2^{k-1}\cos^{k+1}\theta + \cos\theta\, a(\cos\theta) - (1-\cos^2\theta)\{2^{k-1}\cos^{k-1}\theta + b(\cos\theta)\}\\ &= 2^{k-1}\cos^{k+1}\theta + \cos\theta\, a(\cos\theta) + 2^{k-1}\cos^{k+1}\theta + \cos^2\theta\, b(\cos\theta) - 2^{k-1}\cos^{k-1}\theta - b(\cos\theta)\\ &= 2^k\cos^{k+1}\theta + \cos\theta\, a(\cos\theta) + \cos^2\theta\, b(\cos\theta) - 2^{k-1}\cos^{k-1}\theta - b(\cos\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(k+1)\theta &= \sin k\theta\cos\theta + \sin\theta\cos k\theta = \sin\theta\cos\theta\, g_k(\cos\theta) + \sin\theta\, f_k(\cos\theta)\\ &= \sin\theta\,(2^{k-1}\cos^k\theta + \cos\theta\, b(\cos\theta) + 2^{k-1}\cos^k\theta + a(\cos\theta))\\ &= \sin\theta\,(2^k\cos^k\theta + \cos\theta\, b(\cos\theta) + a(\cos\theta))\end{aligned}$$

$f_{k+1}(x) = 2^k x^{k+1} + xa(x) + x^2 b(x) - 2^{k-1}x^{k-1} - b(x), g_{k+1}(x) = 2^k x^k + xb(x) + a(x)$とすれば、$f_{k+1}(x)$は$k+1$次多項式、$g_{k+1}(x)$は$k$次多項式であり、いずれも最高次の係数は$2^k$で、その他の係数は整数である。

したがって、$n = k+1$でも成立し、①②が示された。

$\theta = \dfrac{m}{n}\cdot\pi$のとき、$n\theta = m\pi$より　$\cos n\theta = \cos m\pi = (-1)^m$

n次多項式$f_n(x)$を用いて、$f_n(\cos\theta) = (-1)^m$と表せる。

$\cos\theta = \dfrac{1}{p}$のとき、$n$次多項式$f_n(x) - (-1)^m$は$px-1$を因数に持つが、$f_n(x)$の最高次の係数は$2^{n-1}$であり、

pは3以上の素数であるから、2^{n-1}はpで割り切れず、$px-1$を因数に持つことはない。

したがって、条件を満たす整数m, nは存在しない。……(答)

※1996 年京大後期理 $\boxed{1}$ に類題あり。