

2023 年京大理 [2] 文 [2] 共通

4 点 O, A, B, C のうちどの 3 点も一直線上にはなく、4 点 O, A, B, C は四面体をなしている。

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ であり、 $\overrightarrow{OR} = s\overrightarrow{OD} = s\overrightarrow{OA} + 2s\overrightarrow{OB} + 3s\overrightarrow{OC}$ とおける。

直線 QR 上の点は

$$(1-t)\overrightarrow{OQ} + t\overrightarrow{OR} = \frac{1-t}{2}\overrightarrow{OB} + t(s\overrightarrow{OA} + 2s\overrightarrow{OB} + 3s\overrightarrow{OC}) = st\overrightarrow{OA} + \left(\frac{1-t}{2} + 2st\right)\overrightarrow{OB} + 3st\overrightarrow{OC} \quad \text{---①}$$

と表せる。

直線 PC 上の点は

$$(1-u)\overrightarrow{OP} + u\overrightarrow{OC} = \frac{1-u}{3}\overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{OC} \quad \text{---②}$$

と表せる。

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は一次独立である。直線 QR と直線 PC が交点を持つとき、ベクトルの一意性より

$$st = \frac{1-u}{3} \quad \text{---③} \quad \frac{1-t}{2} + 2st = 0 \quad \text{---④} \quad 3st = u \quad \text{---⑤}$$

$$\text{③、⑤より} \quad 3st = 1 - 3st \quad 6st = 1 \quad \therefore st = \frac{1}{6} \quad \therefore u = \frac{1}{2}$$

$$\text{④より} \quad 1 - t + 4st = 1 - t + \frac{2}{3} = 0 \quad \therefore t = \frac{5}{3} \quad \therefore s = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{10}\overrightarrow{OD} \text{ であるから} \quad \therefore OR:RD = 1:9 \quad \dots\dots (\text{答})$$