2024年京大文 $\boxed{3}$

$f(x)=\left|\left(x-\frac{3}{2}a\right)\left(x+\frac{a}{2}\right)\right|+ax+\frac{3}{4}a^2$より

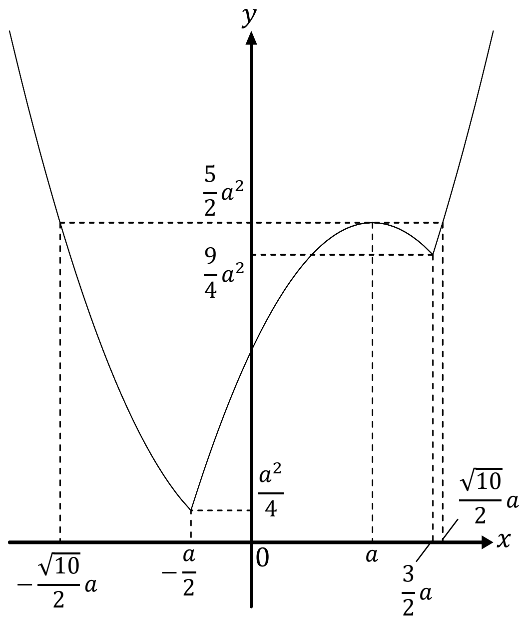
$-\frac{a}{2}\leqq x\leqq\frac{3}{2}a$のとき　$f(x)=-x^2+\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)+ax+\frac{3}{4}a^2=-x^2+2ax+\frac{3}{2}a^2=-(x-a)^2+\frac{5}{2}a^2$

$x\leqq-\frac{a}{2},\frac{3}{2}a\leqq x$のとき　$f(x)=x^2-\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)+ax+\frac{3}{4}a^2=x^2$

$f(a)=\frac{5}{2}a^2$　$f\left(-\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{2}+\frac{3}{4}a^2=\frac{a^2}{4}$　$f\left(\frac{3}{2}a\right)=\frac{3}{2}a^2+\frac{3}{4}a^2=\frac{9}{4}a^2$

$x^2=\frac{5}{2}a^2$とすると　$x=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}a$

$y=f(x)$のグラフは右図の通り。



$\frac{\sqrt{10}}{2}a\leqq 1$　$0<a\leqq\frac{\sqrt{10}}{5}$のとき

$f(\pm 1)\geqq f(a)$であるから、最大値は　$\therefore f(\pm 1)=1$。

$a\leqq 1\leqq\frac{\sqrt{10}}{2}a$　$\frac{\sqrt{10}}{5}\leqq a\leqq 1$のとき

$f(\pm 1)\leqq f(a)$であるから、最大値は　$\therefore f(a)=\frac{5}{2}a^2$。

$-1\leqq-\frac{a}{2},1\leqq a$　$1\leqq a\leqq 2$のとき

$f(1)=\frac{3}{2}a^2+2a-1$　$f(-1)=1$　$f(1)-f(-1)=\frac{3}{2}a^2+2(a-1)>0$　最大値は　$\therefore f(1)=\frac{3}{2}a^2+2a-1$

$-\frac{a}{2}\leqq-1,$　$2\leqq a$のとき　$f(x)$は$-1\leqq x\leqq 1$において単調増加であり、最大値は　$\therefore f(1)=\frac{3}{2}a^2+2a-1$

以上により　$\therefore\begin{cases}0<a\leqq\frac{\sqrt{10}}{5}\text{のとき} & 1\\ \frac{\sqrt{10}}{5}\leqq a\leqq 1\text{のとき} & \frac{5}{2}a^2\\ 1\leqq a\text{のとき} & \frac{3}{2}a^2+2a-1\end{cases}$　……(答)