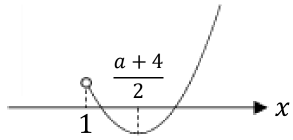
2024 年京大文 $\boxed{5}$

$f(x)=x^2-4x+5-(ax+b)=x^2-(a+4)x+5-b$とおく。

2 次方程式$f(x)=0$が、$x>1$において相違なる 2 実数解を持てばよい。

$f(x)=\left(x-\dfrac{a+4}{2}\right)^2+5-b-\dfrac{(a+4)^2}{4}\quad a>0$ より、$\dfrac{a+4}{2}>1$ は成立。



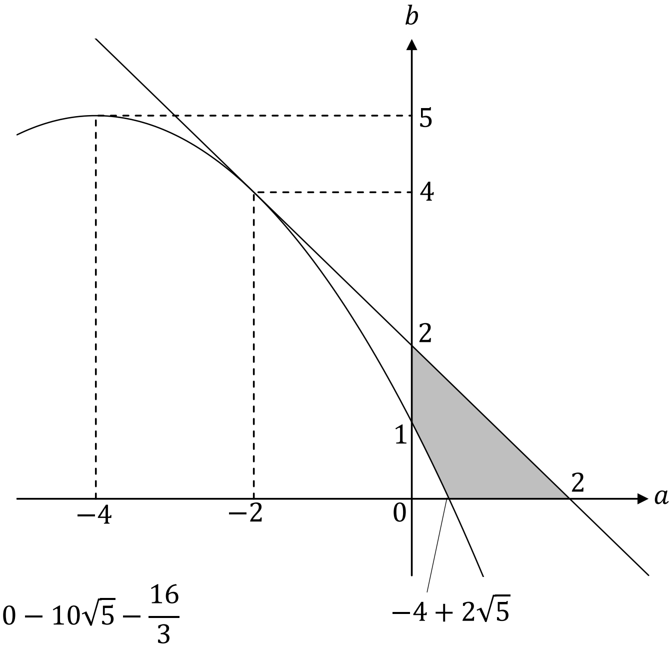
$f(1)=2-(a+b)>0\quad \therefore b<-a+2$ ―― ①

$f\left(\dfrac{a+4}{2}\right)=5-b-\dfrac{(a+4)^2}{4}<0\quad \therefore b>-\dfrac{(a+4)^2}{4}+5$ ―― ②

①、②および$a>0, b>0$ より、点(a,b)の動く範囲は右図の網掛け部の通り。境界線を含まない。

直線$b=-a+2$ は、点$(-2,4)$において

$b>-\dfrac{(a+4)^2}{4}+5$ に接する。



求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2-\int_0^{-4+2\sqrt{5}}\left(-\frac{(a+4)^2}{4}+5\right)da$$

$$=2-\left[-\frac{(a+4)^3}{12}+5a\right]_0^{-4+2\sqrt{5}}$$

$$=2-\left(-\frac{40\sqrt{5}}{12}-20+10\sqrt{5}+\frac{64}{12}\right)=2+\frac{10\sqrt{5}}{3}+20-10\sqrt{5}-\frac{16}{3}$$

$$=\frac{50-20\sqrt{5}}{3}$$ ……(答)