

2024 年京大理 [2]

$y = 3 \cos \theta + 8 + i(3 \sin \theta + 6)$  とおける。  $z = \frac{x+y}{2}$  より  $x = 2z - y$  であるから

$$|x| = |2z - y| \leq 2 \quad \left| z - \frac{y}{2} \right| = \left| z - \left( \frac{3}{2} \cos \theta + 4 + i \left( \frac{3}{2} \sin \theta + 3 \right) \right) \right| \leq 1$$

$\theta$  を固定すると、 $z$  は  $\frac{3}{2} \cos \theta + 4 + i \left( \frac{3}{2} \sin \theta + 3 \right)$  を中心とした半径 1 の円の周および内部を動く。

$w = \frac{3}{2} \cos \theta + 4 + i \left( \frac{3}{2} \sin \theta + 3 \right)$  とする。  $\theta$  を変化させると、 $w$  は円  $|w - (4 + 3i)| = \frac{3}{2}$  の周を動く。

半径 1 の円の中心を、円  $|w - (4 + 3i)| = \frac{3}{2}$  の周に沿って動かすと、 $z$  が動く範囲は右図の通り。境界線を含む。

これは外径  $\frac{5}{2}$ 、内径  $\frac{1}{2}$  のドーナツ形であるから、

面積は  $\pi \cdot \frac{25}{4} - \pi \cdot \frac{1}{4} = 6\pi \dots\dots$  (答)

