2024 年京大理 $\boxed{4}$

この数列がa_0からa_nまで奇数の自然数をとるとき、

$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+1}{2}$ より　$a_{n+1}+1=\dfrac{3}{2}(a_n+1)$　$a_n+1=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n(a_0+1)$　$\therefore a_n=\dfrac{3^n}{2^n}(a_0+1)-1$

(1)

$a_3=\dfrac{3^3}{2^3}(a_0+1)-1$ は整数であるから、a_0+1 は$2^3=8$ の倍数である。

$a_0+1=8$とすると、$a_3=3^3-1=26$は偶数であるから、不適。

$a_0+1=2^4=16$とすると、$a_3=2\cdot 3^3-1=53,\ a_2=2^2\cdot 3^2-1=35,\ a_1=2^3\cdot 3-1=23$は奇数。

求める最小値は　$\therefore a_0=15$ ……(答)

(2)

$a_{10}=\dfrac{3^{10}}{2^{10}}(a_0+1)-1$ は整数であるから、a_0+1 は$2^{10}=1024$ の倍数である。

$a_0+1=1024$とすると、$a_3=3^{10}-1$は偶数であるから、不適。

$a_0+1=2^{11}=2048$とすると、

$a_{10}=2\cdot 3^{10}-1,\ a_9=2^2\cdot 3^9-1,\ a_8=2^3\cdot 3^8-1,\ a_7=2^4\cdot 3^7-1,\ a_6=2^5\cdot 3^6-1$

$a_5=2^6\cdot 3^5-1,\ a_4=2^7\cdot 3^4-1,\ a_3=2^8\cdot 3^3-1,\ a_2=2^9\cdot 3^2-1,\ a_1=2^{10}\cdot 3-1$

はいずれも奇数。

求める最小値は　$\therefore a_0=2047$ ……(答)