2025年京大文$\boxed{1}$

問1

$2025^x=3^y=5^z=a$とすると

$2025=3^4\cdot 5^2=a^{\frac{1}{x}}$ ——① $3=a^{\frac{1}{y}}$ ——② $5=a^{\frac{1}{z}}$ ——③

②、③を①に代入すると

$3^4\cdot 5^2=a^{\frac{4}{y}}\cdot a^{\frac{2}{z}}=a^{\frac{4}{y}+\frac{2}{z}}=a^{\frac{1}{x}}$ $\frac{4}{y}+\frac{2}{z}=\frac{1}{x}$ $4xz+2xy=yz$

したがって $\therefore 2xy+4xz-yz=0$ (証明終)

問2

$n^4+6n^2+23=(n^2-n+4)(n^2+n+3)-n+11$ $\frac{n^4+6n^2+23}{n^2+n+3}=n^2-n+4+\frac{11-n}{n^2+n+3}$

n^4+6n^2+23がn^2+n+3で割り切れるとき、$f(n)=\frac{11-n}{n^2+n+3}$が整数でなければならない。

このとき、$f(n)=0$または$|f(n)|\geqq 1$である。

$f(n)=0$のとき $\therefore n=11$

$|f(n)|\geqq 1$のとき

$n<11$のとき $\frac{11-n}{n^2+n+3}\geqq 1$ $n^2+n+3\leqq 11-n$ $n^2+2n-8=(n+4)(n-2)\leqq 0$

nは正の整数より $n=1,2$ $f(1)=\frac{10}{5}=2$ $f(2)=\frac{9}{9}=1$ いずれも条件を満たす。

$n>11$のとき $\frac{n-11}{n^2+n+3}\geqq 1$ $n^2+n+3\leqq n-11$ $n^2+14\leqq 0$となるから、不適。

以上により、求めるnは $\therefore n=1,2,11$ ……(答)