2025 年京大文 $\boxed{2}$

$f(x)=px^2+qx+r$とすると、$f(f(x))$のx^4の項はp^3x^4であるから　$p^3=\dfrac{1}{8}$　$\therefore p=\dfrac{1}{2}$

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+qx+r$として

$$\begin{aligned} f(f(x))+c &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+qx+r\right)^2+q\left(\frac{1}{2}x^2+qx+r\right)+r+c \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4+q^2x^2+r^2+qx^3+rx^2+2qrx\right)+\frac{1}{2}qx^2+q^2x+qr+r+c \\ &= \frac{1}{8}x^4+\frac{1}{2}qx^3+\frac{1}{2}(q^2+q+r)x^2+q(q+r)x+qr+r+c \end{aligned}$$

左辺と係数を比較して

$\dfrac{1}{2}q=a$ ―― ①　$\dfrac{1}{2}(q^2+q+r)=b$ ―― ②　$q(q+r)=0$ ―― ③　$qr+r+c=0$ ―― ④

③より、$q=0$ または$q+r=0$ である。

$q=0$ のとき　$a=0, b=\dfrac{1}{2}r, c=-r$　$\therefore a=0$　bはすべての実数。

$q+r=0$ のとき　$a=\dfrac{1}{2}q, b=\dfrac{1}{2}q^2, c=q^2+q$　$\therefore b=\dfrac{1}{2}(2a)^2=2a^2$　aはすべての実数。

以上により　$a=0$ または$b=2a^2$

図示すると、右図の太線部である。