2025 年京大文 $\boxed{3}$

n回の施行後に作られたn桁の数を、X_nと表す。
X_nが 6 で割り切れるとき、X_nは 2 で割り切れて、なおかつ 3 で割り切れる。

X_nが 2 で割り切れる条件は、最も右の桁の数字が 2 であることであり、他の桁は任意である。

X_nが 3 で割り切れる条件は、X_nの各桁の数字の和が 3 で割り切れることである。
i) X_{n-1}の各桁の数字の和が 3 で割り切れるとき、X_nの各桁の数字の和は 3 で割り切れない。
ii) X_{n-1}の各桁の数字の和を 3 で割った余りが 1 であるとき、裏が出て 2 が追加されれば、X_nの各桁の数字の和は 3 で割り切れる。
iii) X_{n-1}の各桁の数字の和を 3 で割った余りが 2 であるとき、表が出て 1 が追加されれば、X_nの各桁の数字の和は 3 で割り切れる。

X_nが 6 で割り切れるのは、上記のii)の場合である。
X_nの各桁の数字の和を 3 で割った余りが、0, 1, 2 である確率を、それぞれp_n, q_n, r_nとおくと

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}r_n=\frac{1}{2}(p_n+r_n)=\frac{1}{2}(1-q_n) \quad q_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(q_n-\frac{1}{3}\right)$$

$q_1=\dfrac{1}{2}$であるから　$q_n-\dfrac{1}{3}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(q_1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}$　$\therefore q_n=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right\}$

求める確率は　$\therefore \dfrac{1}{2}q_{n-1}=\dfrac{1}{6}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ ……(答)　$n=1$ でも成立する。