

2024 年京大文 [4]

(1)

C_1 の方程式は $x \geq 0$ のとき $y = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$ $x \leq 0$ のとき $y = x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$

$t < 0$ のとき C_1 上の点 $(t, t^2 + 2t)$ における接線の方程式は

$$y = (2t + 2)(x - t) + t^2 + 2t = (2t + 2)x - t^2$$

これが C_2 にも接するとき $x^2 - 5x + \frac{7}{4} = (2t + 2)x - t^2$ $x^2 - (2t + 7)x + t^2 + \frac{7}{4} = 0$ が重解を持つから

$$D = (2t + 7)^2 - (4t^2 + 7) = 28t + 42 = 0 \quad \therefore t = -\frac{3}{2}$$

$t > 0$ のとき C_1 上の点 $(t, t^2 - 2t)$ における接線の方程式は

$$y = (2t - 2)(x - t) + t^2 - 2t = (2t - 2)x - t^2$$

これが C_2 にも接するとき $x^2 - 5x + \frac{7}{4} = (2t - 2)x - t^2$ $x^2 - (2t + 3)x + t^2 + \frac{7}{4} = 0$ が重解を持つから

$$D = (2t + 3)^2 - (4t^2 + 7) = 12t + 2 = 0 \quad \therefore t = -\frac{1}{6} \quad t > 0 \text{ を満たさないから不適。}$$

以上により、題意を満たす直線 l_2 はただ一つ存在する。 (証明終)

(2)

l_2 の方程式は $y = -x - \frac{9}{4}$

C_1, l_1, l_2 で囲まれた領域を図示すると、右図の通り。

対称性に着目して、求める面積は

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(x^2 - 2x + \frac{15}{4} \right) dx - \frac{1}{2} \cdot 3^2 \\ &= 2 \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{15}{4}x \right]_0^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{2} \\ &= 2 \left(\frac{9}{8} - \frac{9}{4} + \frac{45}{8} \right) - \frac{9}{2} = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

