2025 年京大理 $\boxed{2}$

$9z^2 = x^6 + y^4$より、$x^6 + y^4$は3の倍数である。

$x = 3a \pm 1, y = 3b \pm 1$のとき　$x^6 + y^2 = (3\text{の倍数}) + 1 + (3\text{の倍数}) + 1 = (3\text{の倍数}) + 2$

$x = 3a, y = 3b \pm 1$のとき　$x^6 + y^2 = (3\text{の倍数}) + (3\text{の倍数}) + 1 = (3\text{の倍数}) + 1$

$x = 3a \pm 1, y = 3b$のとき　$x^6 + y^2 = (3\text{の倍数}) + 1 + (3\text{の倍数}) = (3\text{の倍数}) + 1$

したがって、xもyも3の倍数でなければならないので、$x = 3a, y = 3b$とする。

　$9z^2 = 3^6a^6 + 3^4b^4$　$z^2 = 3^4a^6 + 3^2b^4 = 9(9a^6 + b^4)$

z^2は3の倍数であるから、zは3の倍数であり、$z = 3c$とする。

　$z^2 = 9c^2 = 9(9a^6 + b^4)$　$c^2 = 9a^6 + b^4$ ――①

①を満たす自然数a, b, cを、a, bが小さい方から順に調べる。

$a = 1, b = 1$のとき　$c^2 = 9 + 1 = 10$　10は平方数ではないから不適。

$a = 1, b = 2$のとき　$c^2 = 9 + 16 = 25$　$\therefore c = 5$

したがって、Nを最小にする正の整数x, y, zは　$\therefore x = 3, y = 6, z = 15$

　$9z^2 = 9 \cdot 15^2 = 9 \cdot 225 = 2025$

　$x^6 + y^4 = 3^6 + 6^4 = 81 \cdot (9 + 16) = 81 \cdot 25 = 2025$

求めるNの最小値は　$\therefore N = 2025$ ……（答）

※問題文に西暦が入っている例は数あれど、答えが西暦とは恐れ入った。