2025 年京大理$\boxed{3}$

$$f'(x) = 2x\log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2\log x + 1)$$

$x > \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ より、$2\log x + 1 > 0$ であるから、l_tの傾きは$-\dfrac{1}{t(1+2\log t)}$である。

l_tの方程式は　$y = -\dfrac{1}{t(1+2\log t)}(x-t) + t^2\log t - \dfrac{1}{1+2\log t} = y = -\dfrac{1}{t(2\log t+1)}x + t^2\log t$

$y = 0$ とすると　$-x + t^3(\log t)(1+2\log t) = 0$　$\therefore x = t^3\{\log t + 2(\log t)^2\}$

$p(t) = t^3\{\log t + 2(\log t)^2\}$であるから

$$p'(t) = 3t^2\{\log t + 2(\log t)^2\} + t^3(1+4\log t)\frac{1}{t} = t^2\{1 + 7\log t + 6(\log t)^2\} = t^2(1+\log t)(1+6\log t)$$

$\dfrac{1}{\sqrt{e}} < x \leqq e$のとき、$-\dfrac{1}{2} < \log x \leqq 1$ であるから

$p(t)$の増減は右の通りで、$x = \dfrac{1}{\sqrt[6]{e}}$のとき極小。

t	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$	$\cdots$	e
$p'(t)$		$-$	0	$+$	
$p(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$p\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 0 \quad p\left(\frac{1}{\sqrt[6]{e}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{18}\right) = -\frac{1}{9\sqrt{e}} \quad p(e) = 3e^3$$

求める範囲は　$\therefore -\dfrac{1}{9\sqrt{e}} \leqq p(t) \leqq 3e^3$ ……(答)