2025年京大理$\boxed{4}$

(1)

平面LMN上の任意の点Pは、$\overrightarrow{LP}=a\overrightarrow{LM}+b\overrightarrow{LN}$と表せる。

$\overrightarrow{LP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OL}=a\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OL}\right)+b\left(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OL}\right)$

$\therefore \overrightarrow{OP}=(1-a-b)\overrightarrow{OL}+a\overrightarrow{OM}+b\overrightarrow{ON}=s(1-a-b)\overrightarrow{OA}+ta\overrightarrow{OB}+ub\overrightarrow{OC}$

$1=\dfrac{1}{4s}+\dfrac{1}{2t}+\dfrac{3}{4u}$であるから

$$\overrightarrow{OP}=s\left(\frac{1}{4s}+\frac{1}{2t}+\frac{3}{4u}-a-b\right)\overrightarrow{OA}+ta\overrightarrow{OB}+ub\overrightarrow{OC}=\left(\frac{1}{4}+\frac{s}{2t}+\frac{3s}{4u}-sa-sb\right)\overrightarrow{OA}+ta\overrightarrow{OB}+ub\overrightarrow{OC}$$

ここで、$a=\dfrac{1}{2t},b=\dfrac{3}{4u}$とすると　$\therefore \overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OC}$ ―①

したがって、s,t,uの値に無関係な一定の点Pが存在することが示された。　(証明終)

次に、p,q,rを定数として、$\overrightarrow{OP}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}$とすると

$p=s(1-a-b),q=ta,r=ub$　$\dfrac{p}{s}=1-\dfrac{q}{t}-\dfrac{r}{u}$　$\therefore \dfrac{p}{s}+\dfrac{q}{t}+\dfrac{r}{u}=1$ ―②

条件を満たす相違なる3組の(s,t,u)、$(s,t,u)=(1,1,3),(2,4,1),(2,1,2)$を②に代入すると

$p+q+\dfrac{r}{3}=1,\dfrac{p}{2}+\dfrac{q}{4}+r=1,\dfrac{p}{2}+q+\dfrac{r}{2}=1$　これらを連立して解くと　$\therefore p=\dfrac{1}{4},q=\dfrac{1}{2},r=\dfrac{3}{4}$

相違なる3組の(s,t,u)について、$\overrightarrow{OP}$は①と一致する。

したがって、s,t,uの値に無関係な一定の点Pはただ一つである。　(証明終)

(2)

$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$より、$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OA}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OC}\right)$

Pは、3点$\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OA},\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB},\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OC}$を通る平面上の点であり、この平面は三角形$ABC$を含む平面と平行である。

OPと三角形ABCを含む平面との交点をQとすると、$OQ:QP=2:1$である。

これより、Oと三角形ABCの距離は、Pと三角形ABCの距離の2倍であるから、

四面体$PABC$の体積は　$\therefore \dfrac{V}{2}$ ⋯⋯(答)