2025年京大理$\boxed{5}$

$\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ \frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{4}\end{pmatrix}$より、直線$AP$上の点は$\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}t\cos\theta\\ t\sin\theta\\ \frac{\sqrt{2}}{4}+t\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\end{pmatrix}$と表せる。

Qのz座標は0であるから　$\frac{\sqrt{2}}{4}+t\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=0$　$t\left(\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$より$\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos\theta\leqq 1$であるから　$\therefore t=-\frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta-1}$

これより、Qのx座標、y座標は　$x=-\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}\cos\theta-1}$ ——①　$y=-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}\cos\theta-1}$ ——②

$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}}+1\right)$より、$\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos\theta\leqq 1$においてxは単調増加。　$\therefore x\leqq-\frac{1}{\sqrt{2}-1}=-1-\sqrt{2}$

$\theta\to\pm\frac{\pi}{4}$のとき、$x\to-\infty$である。

①より　$(\sqrt{2}\cos\theta-1)x=-\cos\theta$　$(\sqrt{2}x+1)\cos\theta=x$　$x\neq-\frac{1}{\sqrt{2}}$より　$\therefore\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{2}x+1}$ ——③

②より　$\sin\theta=-y(\sqrt{2}\cos\theta-1)=-y\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2}x+1}-1\right)=\frac{y}{\sqrt{2}x+1}$　$\therefore\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{2}x+1}$ ——④

③④を$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$に代入すると

$x^2+y^2=(\sqrt{2}x+1)^2$　$x^2+2\sqrt{2}x+1-y^2=0$　$\therefore\left(x+\sqrt{2}\right)^2-y^2=1$

求める軌跡は、双曲線$\left(x+\sqrt{2}\right)^2-y^2=1$の$x\leqq-1-\sqrt{2}$の部分。……(答)
図示すると下図の通り。$y=\pm\left(x+\sqrt{2}\right)$は漸近線である。