2025 年京大理 $\boxed{6}$

$Y_n = Y_{n-1} + 1$ となるのは、$X_{n-1} = 1$ かつ$X_n = 1$ のときのみであり、その他の場合は$Y_n = Y_{n-1}$である。
n回の施行後、以下の$i)$～$iv)$の事象が発生する確率を、それぞれa_n, b_n, c_n, d_nとする。

$i)$ Y_nは奇数であり、$X_n = 0$　　$ii)$ Y_nは奇数であり、$X_n = 1$

$iii)$ Y_nは偶数であり、$X_n = 0$　　$iv)$ Y_nは偶数であり、$X_n = 1$

以下の漸化式が成り立つ。

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \text{ ——①} \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}d_n \text{ ——②}$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}d_n \text{ ——③} \quad d_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \text{ ——④}$$

求める確率は、$a_n + b_n$で与えられる。

①＋③より　$a_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n + c_n + d_n) = \frac{1}{2}$　$\therefore a_n + c_n = \frac{1}{2}$

②＋④より　$b_{n+1} + d_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n + c_n + d_n) = \frac{1}{2}$　$\therefore b_n + d_n = \frac{1}{2}$

①＋②より　$a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(b_n + d_n) = a_n + \frac{1}{4}$　$\therefore a_{n+2} + b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{4}$ ——⑤

①－②より　$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - d_n) = \frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{2} + b_n\right) = b_n - \frac{1}{4}$　$\therefore a_{n+2} - b_{n+2} = b_{n+1} - \frac{1}{4}$ ——⑥

⑤＋⑥より　$2a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}$　$\therefore a_{n+2} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{8}$ ——⑦

⑤－⑥より　$2b_{n+2} = a_{n+1} - b_{n+1} + \frac{1}{2} = b_n - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = b_n + \frac{1}{4}$　$\therefore b_{n+2} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{8}$ ——⑧

ここで、a_2, a_3, b_2, b_3を求める。Y_nは、数列$X_1, X_2, \cdots, X_n$の中の「11」の並びの個数であるから

$n = 2$ のとき　00, 01, 10, 11　$\therefore a_2 = 0, b_2 = \frac{1}{4}$

$n = 3$ のとき　000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111　$\therefore a_3 = \frac{1}{8}, b_3 = \frac{1}{8}$

⑦より　$a_{2(m+1)} = \frac{1}{2}a_{2m} + \frac{1}{8}, a_{2(m+1)-1} = \frac{1}{2}a_{2m-1} + \frac{1}{8}$

$$a_{2(m+1)} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(a_{2m} - \frac{1}{4}\right), a_{2(m+1)-1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(a_{2m-1} - \frac{1}{4}\right)$$

$$a_{2m} - \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left(a_2 - \frac{1}{4}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}, a_{2m-1} - \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-2}\left(a_3 - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

$$\therefore a_{2m} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}, a_{2m-1} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

⑧より、同様に　$b_{2(m+1)}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(b_{2m}-\frac{1}{4}\right), b_{2(m+1)-1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(b_{2m-1}-\frac{1}{4}\right)$

$$b_{2m}-\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left(b_2-\frac{1}{4}\right)=0, b_{2m-1}-\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{m-2}\left(b_3-\frac{1}{4}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

$$\therefore b_{2m}=\frac{1}{4}, b_{2m-1}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

以上により　$\therefore a_{2m}+b_{2m}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}, a_{2m-1}+b_{2m-1}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{m}$

求める確率は　nが偶数のとき $p_n=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}$, nが奇数のとき $p_n=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$ ……(答)