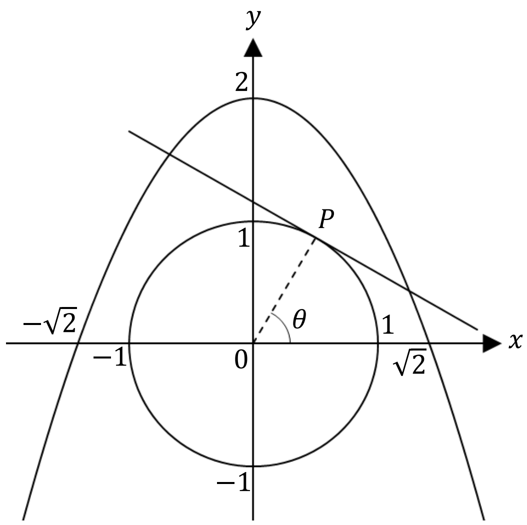
2026 年京大文 $\boxed{1}$



$P(\cos\theta, \sin\theta)\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。このとき、接線lの方程式は

$$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1 \quad \therefore y=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\tan\theta}x$$

$$2-x^2=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\tan\theta}x \quad x^2-\frac{1}{\tan\theta}x+\frac{1}{\sin\theta}-2=0 \text{——①}$$

① の 2 解を$\alpha, \beta(\alpha<\beta)$とすると

$$\alpha+\beta=\frac{1}{\tan\theta}, \alpha\beta=\frac{1}{\sin\theta}-2 \text{——②}$$

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{(2-x^2)-\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\tan\theta}x\right)\right\}dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

②より

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{1}{\tan^2\theta}-\frac{4}{\sin\theta}+8=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}-\frac{4}{\sin\theta}+8=\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{4}{\sin\theta}+7$$

$$=\left(\frac{1}{\sin\theta}-2\right)^2+3>0$$

$(\beta-\alpha)^2$は①の判別式Dに等しいから、確かに相違なる 2 実数解を持つ。

$$\therefore S=\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{\sin\theta}-2\right)^2+3\right\}^{\frac{3}{2}}$$

Sは、$\dfrac{1}{\sin\theta}=2$、$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$のとき最小となる。Sの最小値は　$\dfrac{1}{6}\cdot 3^{\frac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……(答)

※ Sの最小値を与えるPは、$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$である。