2026年京大文$\boxed{3}$

(1)

Nが3の倍数であるとき、$m=\dfrac{N}{3}, k=0$とすればよい。Nが3で割り切れないときを考える。

pは3より大きい素数であるから、3で割った余りは1か2である。

$i)$ $p=3l+1, N=3n+1$のとき

$3m+pk=3m+(3l+1)k=3(m+lk)+k=3n+1$

$m+lk=n, k=1$ととれて　$\therefore m=n-l, k=1$

$3n+1 \geqq 2p=6l+2$より　$3n \geqq 6l+1$　$n \geqq 2l+\dfrac{1}{3}$　$\therefore n \geqq 2l+1$　$\therefore n-l=l+1>0$

したがって、非負整数$m=n-l$がとれる。

$ii)$ $p=3l+1, N=3n+2$のとき

$3m+pk=3m+(3l+1)k=3(m+lk)+k=3n+2$

$m+lk=n, k=2$ととれて　$\therefore m=n-2l, k=2$

$3n+2 \geqq 2p=6l+2$より　$3n \geqq 6l$　$\therefore n \geqq 2l$　$\therefore n-2l \geqq 0$

したがって、非負整数$m=n-2l$がとれる。

$iii)$ $p=3l+2, N=3n+1$のとき

$3m+pk=3m+(3l+2)k=3(m+lk+1)+2k-3=3n+1$

$m+lk+1=n, 2k-3=1$ととれて　$\therefore m=n-2l-1, k=2$

$3n+1 \geqq 2p=6l+4$より　$3n \geqq 6l+3$　$\therefore n \geqq 2l+1$　$\therefore n-2l-1 \geqq 0$

したがって、非負整数$m=n-2l-1$がとれる。

$iv)$ $p=3l+2, N=3n+2$のとき

$3m+pk=3m+(3l+2)k=3(m+lk)+2k=3n+2$

$m+lk=n, k=1$ととれて　$\therefore m=n-l, k=1$

$3n+2 \geqq 2p=6l+4$より　$3n \geqq 6l+2$　$n \geqq 2l+\dfrac{2}{3}$　$\therefore n \geqq 2l+1$　$\therefore n-l=l+1>0$

したがって、非負整数$m=n-l$がとれる。

以上、$i)$〜$iv)$より、題意は示された。(証明終)

(2)

$1 \leqq N \leqq 2p-1$のうち、$3m+pk$と表せるNの個数を考える。

$p=3l+1$のとき　$2p-1=6l+1=p+3l$

$k=1$のとき$0 \leqq m \leqq l$　$k=0$のとき$1 \leqq m \leqq 2l$　重複するものはない。

$1 \leqq N \leqq 2p-1$のうち、$3m+pk$と表せるNの個数は　$l+1+2l=3l+1=p$

$p=3l+2$ のとき　$2p-1=6l+3=p+3l+1$
$k=1$ のとき $0\leqq m\leqq l$　$k=0$ のとき $1\leqq m\leqq 2l+1$　重複するものはない。
$1\leqq N\leqq 2p-1$ のうち、$3m+pk$と表せるNの個数は　$l+1+2l+1=3l+2=p$

いずれにしても、$1\leqq N\leqq 2p-1$ のうち、$3m+pk$と表せるNの個数はpであるから
求める個数は　$\therefore 2p-1-p=p-1$ ……(答)