2026年京大理$\boxed{3}$

$a(n)=2^n$とする。与式を$f_n(x)$とすると、$f_n(x)=(x+1)^{2a(n)}-(x^2+1)^{a(n)}$と表せる。
$f_n(x)$を展開すると、$f_n(x)$の奇数次の項の係数は、${}_{2a(n)}C_{2k-1}\ (k=1,2,\cdots,a(n))$で与えられる。
このうち、${}_{2a(n)}C_{2a(n)-1}={}_{2a(n)}C_1=2a(n)=2^{n+1}$であるから、$f_n(x)$のすべての係数が$2^m$で割り切れるとすると、$m$は少なくとも$n+1$以下であることがわかる。

mの最大値が$n+1$であることを、数学的帰納法により示す。

$$f_1(x)=(x+1)^4-(x^2+1)^2=\{(x+1)^2+(x^2+1)\}\{(x+1)^2-(x^2+1)\}=(2x^2+2x+2)\cdot 2x$$
$$=2^2x(x^2+x+1)$$

したがって、$f_1(x)$のすべての係数が2^2で割り切れるから、$n=1$のとき成立。

$n=k$のとき、$f_k(x)$のすべての係数が2^{k+1}で割り切れると仮定する。

$$f_{k+1}(x)=(x+1)^{2a(k+1)}-(x^2+1)^{a(k+1)}=(x+1)^{4a(k)}-(x^2+1)^{2a(k)}$$
$$=\left\{(x+1)^{2a(k)}+(x^2+1)^{a(k)}\right\}\left\{(x+1)^{2a(k)}-(x^2+1)^{a(k)}\right\}=\left\{(x+1)^{2a(k)}+(x^2+1)^{a(k)}\right\}\cdot f_k(x)$$

仮定により、$f_k(x)$のすべての係数が2^{k+1}で割り切れる。
$(x+1)^{2a(k)}+(x^2+1)^{a(k)}$のすべての係数が割り切れる、2のべき乗の形の数の最大値が2であれば、題意は満たされる。

$(x+1)^{2a(k)}+(x^2+1)^{a(k)}$の係数のうち、$x^{2a(k)}=x^{2^{k+1}}$の係数と、定数項は2である。この他の係数は、奇数次は${}_{2^{k+1}}C_{2l-1}\ (l=1,2,\cdots,2^k)$、偶数次は${}_{2^{k+1}}C_{2l}+{}_{2^k}C_l\ (l=1,2,\cdots,2^k-1)$と表される。

ここで、二項係数${}_{2^p}C_q\ (q=1,2,\cdots,2^p-1)$は、偶数であることを示す。

$${}_{2^p}C_q=\frac{(2^p)!}{(2^p-q)!\,q!}=\frac{2^p}{q}\cdot\frac{(2^p-1)!}{(2^p-q)!\,(q-1)!}=\frac{2^p}{q}\cdot\frac{(2^p-1)!}{\{(2^p-1)-(q-1)\}!\,(q-1)!}=\frac{2^p}{q}\cdot{}_{2^p-1}C_{q-1}$$
$$\therefore q\cdot{}_{2^p}C_q=2^p\cdot{}_{2^p-1}C_{q-1}\quad\text{——①}$$

①の左辺は、2^pの倍数である。$1\leqq q\leqq 2^p-1$であるから、qに含まれる素因数2は最大$p-1$個である。
したがって、$1\leqq q\leqq 2^p-1$において、${}_{2^p}C_q$は素因数2を少なくとも1個含むから、偶数である。

$(x+1)^{2a(k)}+(x^2+1)^{a(k)}$の最高次の係数と定数項は2であり、その他の係数は偶数であることが示された。
したがって、$(x+1)^{2a(k)}+(x^2+1)^{a(k)}$のすべての係数が割り切れる、2のべき乗の形の数の最大値は2。

$f_{k+1}(x)$のすべての係数が2^{k+2}で割り切れることが示されたので、仮定は$n=k+1$でも成立。
以上により、題意は示された。(証明終)

※${}_{2^p}C_q\ (q=1,2,\cdots,2^p-1)$の形の二項係数が偶数であることは、1999年東大理$\boxed{5}$(1)で出題されている。