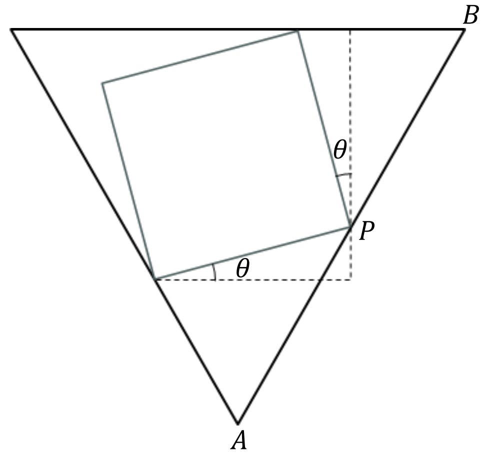
2026 年京大理 $\boxed{4}$

1 辺の長さが 1 の正方形の 4 つの頂点がすべて正三角形の内部にある場合、より 1 辺の長さが小さい、条件を満たす正三角形が存在するのは、明らかである。
1 辺の長さが 1 の正方形の 4 つの頂点のうち、なるべく多くの頂点が正三角形の辺上にあり、正三角形の 1 辺の長さを、それ以上小さくできない場合を考えればよい。

右図のように、1 辺の長さが 1 の正方形の 1 辺の両端の頂点が、それぞれ正三角形の隣接した辺上にあるとする。
この辺が水平な状態から角度θだけ傾いているとする。



対称性から、$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ で考える。

正弦定理により　$\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = \dfrac{AP}{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}$

$\therefore AP = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta\right)$

$PB = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\cos\theta$ であるから、正三角形の 1 辺の長さは

$$L(\theta) = AP + PB = \frac{\sqrt{3}}{3}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)\cos\theta + \sin\theta\right\} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2 + 1}\cos(\theta - \alpha) = \frac{2\sqrt{3\left(2+\sqrt{3}\right)}}{3}\cos(\theta-\alpha)$$

$$= \frac{2\sqrt{3\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{3\sqrt{2}}\cos(\theta-\alpha) = \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\cos(\theta-\alpha)$$

ただし　$\tan\alpha = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}\quad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

$\tan^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \left(2-\sqrt{3}\right)^2$ より、$\alpha = \dfrac{\pi}{12}$ であるから　$\therefore L(\theta) = \left(\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{12}\right)$

$L(\theta)$は、$\theta = 0, \dfrac{\pi}{6}$ のとき最小値$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(2+\sqrt{3}\right) = 1 + \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$をとる。

求める最小値は　$\therefore 1 + \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ ……(答)

※正方形の 1 辺が正三角形の 1 辺上にあるとき最小になるのは、容易に予想できる。

　上記では、$\alpha = \dfrac{\pi}{12}$ と予想できるので、具体的に求めてみた。