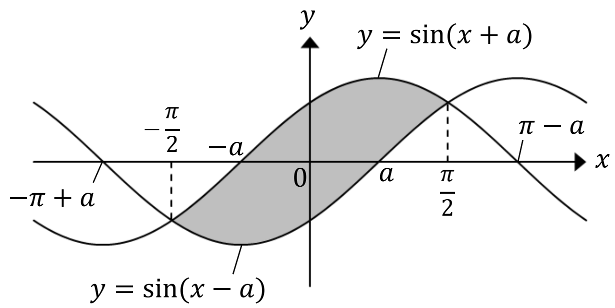
2026年京大理$\boxed{5}$

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$において、$\sin(x+a) - \sin(x-a) = 2\sin a \cos x \geqq 0$ である。

aの値に関わらず、$\sin(x+a) \geqq \sin(x-a)$ であり、等号が成立するのは$x = \pm\dfrac{\pi}{2}$のみである。

$0 < a \leqq \dfrac{\pi}{2}$のとき　D_aを図示すると右図の通り。



対称性から、求める体積は

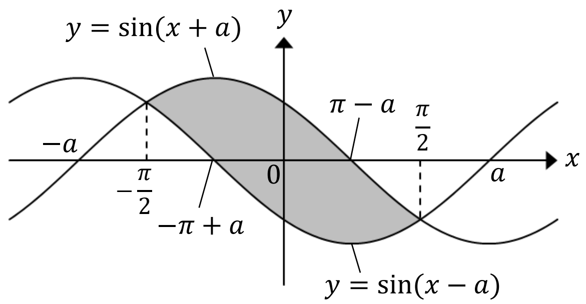
$$V = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x+a)\,dx - 2\pi\int_a^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x-a)\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{1-\cos 2(x+a)\}dx - \pi\int_a^{\frac{\pi}{2}}\{1-\cos 2(x-a)\}dx$$

$$= \pi\left[x - \frac{1}{2}\sin 2(x+a)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \pi\left[x - \frac{1}{2}\sin 2(x-a)\right]_a^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin(\pi+2a) + \frac{1}{2}\sin 2a\right\} - \pi\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin(\pi-2a) - a\right\} = \pi\left(a + \frac{3}{2}\sin 2a\right)$$

$\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$のとき　D_aを図示すると右図の通り。



対称性から、求める体積は

$$V = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x-a)\,dx - 2\pi\int_{\pi-a}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x+a)\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{1-\cos 2(x-a)\}dx - \pi\int_{\pi-a}^{\frac{\pi}{2}}\{1-\cos 2(x+a)\}dx$$

$$= \pi\left[x - \frac{1}{2}\sin 2(x-a)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \pi\left[x - \frac{1}{2}\sin 2(x+a)\right]_{\pi-a}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin(\pi-2a) - \frac{1}{2}\sin 2a\right\} - \pi\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin(\pi+2a) - \pi + a\right\} = \pi\left(\pi - a - \frac{3}{2}\sin 2a\right)$$

以上により　$0 < a \leqq \dfrac{\pi}{2}$のとき$\pi\left(a + \dfrac{3}{2}\sin 2a\right)$、$\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$のとき$\pi\left(\pi - a - \dfrac{3}{2}\sin 2a\right)$ $\cdots\cdots$(答)