

(1)

$$f(x) = a \sin x + b \cos x + c \sin 2x \quad f'(x) = a \cos x - b \sin x + 2c \cos 2x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ より } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = (a-b)\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad \therefore a = b$$

$$f(x) \cos x = a \sin x \cos x + a \cos^2 x + c \sin 2x \cos x = \frac{a}{2} \sin 2x + \frac{a}{2} (1 + \cos 2x) + 2c \sin x \cos^2 x \text{ より}$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx = \left[-\frac{a}{4} \cos 2x + \frac{a}{2} x + \frac{a}{4} \sin 2x - \frac{2}{3} c \cos^3 x \right]_0^{2\pi} = a\pi = 5\pi \quad \therefore a = 5$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6\sqrt{2} \text{ より } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} a + c = \sqrt{2} a + c = 6\sqrt{2} \quad \therefore c = \sqrt{2}(6-a) = \sqrt{2}$$

以上により $\therefore a = b = 5, c = \sqrt{2}$ ……(答)

(2)

$$f'(x) = 5(\cos x - \sin x) + 2\sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = (\cos x - \sin x)\{5 + 2\sqrt{2}(\cos x + \sin x)\}$$

$5 + 2\sqrt{2}(\cos x + \sin x) = 5 + 4 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$ であるから、 $f'(x) = 0$ のとき

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$...	$\frac{5}{4}\pi$...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

$0 \leq x \leq 2\pi$ における $f(x)$ の増減は、右の通り。

$f(x)$ は、 $x = \frac{5}{4}\pi$ において最小値 $-4\sqrt{2}$ をとる。……(答)

なお、確かに $x = \frac{\pi}{4}$ において最大値 $6\sqrt{2}$ をとる。