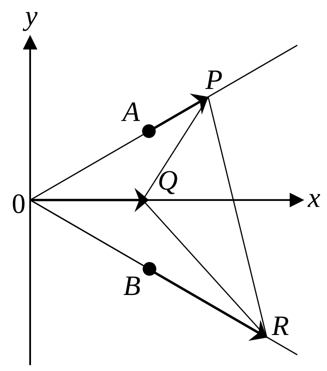
1961 年東大理 $\boxed{1}$ 文 $\boxed{1}$ 共通

(i)

座標平面において、動点 $P,\ R$ を、それぞれ直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x,\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}y$ 上にとり、



動点 Q を x 軸上にとる。$O(0,\ 0),\ A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right),\ B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ とする。

$P,\ Q,\ R$ が出発して t 秒後の座標は、それぞれ

$$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right),\ Q\left(\sqrt{3}t,\ 0\right),\ R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}t,\ -\frac{1}{2}-t\right)$$

と表せる。$\overrightarrow{QP}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}t\right),\ \overrightarrow{QR}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}-t\right)$ であり、

$P,\ Q,\ R$ が一直線上にくるとき

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\left(-\frac{1}{2}-t\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{(t-1)(2t+1)-(1+t)\right\}=\frac{\sqrt{3}}{4}(2t^2-2t-2)=\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-t-1)=0$$

$t^2-t-1=0$　　$t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　　$t>0$ より、求める時間は　$\therefore t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　……(答)

(ii)

△ PQR の面積は　$\dfrac{1}{2}\left|\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\left(-\dfrac{1}{2}-t\right)-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}t\right)\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left|t^2-t-1\right|$

△ AOB は一辺の長さが 1 の正三角形であるから、面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$。

△ PQR と△ AOB の面積が等しいとき　$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left|t^2-t-1\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　$\left|t^2-t-1\right|=1$　　$\therefore t^2-t-1=\pm1$

$t^2-t-1=-1$ のとき　$t^2-t=t(t-1)=0$　　$t^2-t-1=1$ のとき　$t^2-t-2=(t+1)(t-2)=0$

$t>0$ より、求める時間は　$\therefore t=1,\ 2$　……(答)