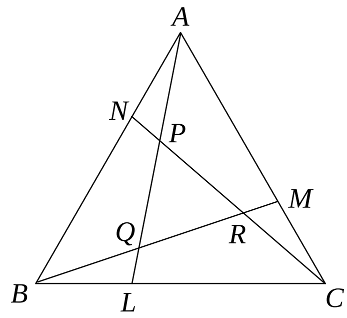
1961年東大理$\boxed{4}$文$\boxed{4}$共通



LはBCを$2:1$に内分し、また$\overrightarrow{AQ}$は$\overrightarrow{AL}$の定数倍であるから

$$\overrightarrow{AL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \therefore \overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AL}=\frac{2}{3}k\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{AC} \quad \text{——①}$$

$BQ:QM=l:1-l$とすると

$$\overrightarrow{AQ}=(1-l)\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AM}=(1-l)\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}l\overrightarrow{AC} \quad \text{——②}$$

①、②より $\begin{cases}\frac{2}{3}k=1-l\\ \frac{1}{3}k=\frac{2}{3}l\end{cases}$ $k=2l$であるから $\frac{4}{3}l=1-l$ $\frac{7}{3}l=1$ $\therefore l=\frac{3}{7}, k=\frac{6}{7}$

対称性より

$AQ:QL=BR:RM=CP:PN=6:1 \quad AP:PL=BQ:QM=CR:RN=3:4$

$\therefore AP:PQ:QL=BQ:QR:RN=CR:RP:PN=3:3:1$

$\triangle ABC$の面積をSとすると、$\triangle ALC$の面積は$\frac{2}{3}S$ $\triangle PLC$の面積は$\frac{2}{3}S\times\frac{4}{7}=\frac{8}{21}S$

$PQ:QL=3:1, PR:RC=1:1$であるから、$\triangle PQR$の面積は$\frac{8}{21}S\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{7}S$

$\triangle PQR$と$\triangle ABC$の面積比は　$1:7$　……(答)