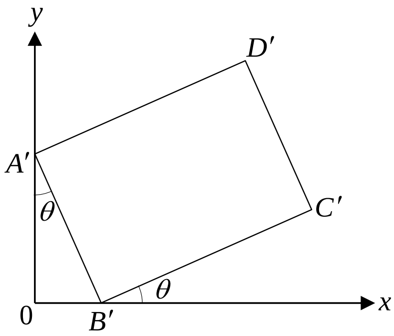
1962 年東大文 $\boxed{4}$

（i）

$\tan\alpha=\sqrt{2}$ のとき　α は鋭角であるから　$\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{1}{3}$　$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　$\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

y 軸上に頂点 A' 、x 軸上に頂点 B' を持ち、$A'B'=1,\ B'C'=\sqrt{2}$ である、
第 1 象限にある長方形 $A'B'C'D'$ を考える。
このとき、$B'C'$ が x 軸となす角を θ とすると、$\angle B'A'O=\theta$ であり、
$OB'=\sin\theta$ であるから、C' の座標は $\begin{pmatrix}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta\\ \sqrt{2}\sin\theta\end{pmatrix}$ で与えられる。



C' を原点中心に角 α 回転した点が、C であるから、C の座標は

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta\\ \sqrt{2}\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta\\ \sqrt{2}\sin\theta\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta-2\sin\theta\\ \sqrt{2}\sin\theta+2\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}-\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta\\ 2\sqrt{2}\sin\theta+2\cos\theta\end{pmatrix}$$ ……(答)

（ii）

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(-\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta)=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cos\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta,\ y=2\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right)$ とする。

$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \cos\beta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\ \left(0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると、$x=\cos(\theta+\beta),\ y=2\sin(\theta+\beta)$ と表せるから、

C は、楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上を動く。C が動き得る範囲を調べる。

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であり、$0<\beta\leqq\theta+\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}+\beta<\pi$ であるから、$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において、x は単調減少である。

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において、$\sin\theta\geqq0,\ \cos\theta\geqq0$ であるから　$\therefore -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ y>0$

C が描く曲線は、楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ の、右図の部分である。