

1962 年東大理 5 文 5 共通

(i)

条件より、 $x + y + z = 6$ ——① $2(xy + yz + zx) = 18 \therefore xy + yz + zx = 9$ ——②

①より $y + z = 6 - x > 0 \therefore 0 < x < 6$

②に代入して、 $xy + yz + zx = x(y + z) + yz = x(6 - x) + yz = 9 \therefore yz = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 > 0 \therefore x \neq 3$

また、 y, z は二次方程式 $t^2 - (6 - x)t + (x - 3)^2 = 0$ の 2 解であるから、

$$D = (6 - x)^2 - 4(x - 3)^2 = x^2 - 12x + 36 - 4(x^2 - 6x + 9) = 12x - 3x^2 = 3x(4 - x) \geq 0 \therefore 0 \leq x \leq 4$$

以上により $\therefore 0 < x < 3, 3 < x \leq 4$ ……(答)

(ii)

(i) より、直方体の体積は $xyz = x(x - 3)^2$

$f(x) = x(x - 3)^2$ とおくと $f'(x) = (x - 3)^2 + 2x(x - 3) = (x - 3)\{(x - 3) + 2x\} = 3(x - 1)(x - 3)$

x	0	…	1	…	3	…	4
$f'(x)$	/	+	0	-	/	+	
$f(x)$	/	↗		↘	/	↗	

増減表より、極大値は $f(1) = 4$
 また、 $f(3) = 0, f(4) = 1$ であるから、

したがって、体積の最大値は 4 ……(答) なお、このとき 3 辺の長さは 1, 1, 4 である。