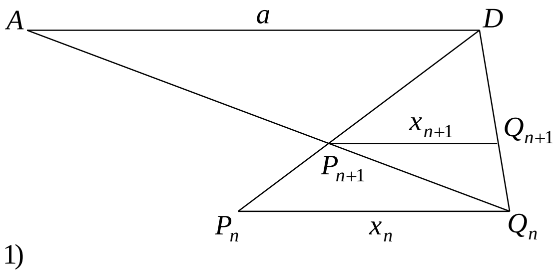
1963 年東大理 $\boxed{3}$

(1)

右図において、$DP_{n+1}:P_{n+1}P_n=a:P_nQ_n=a:x_n$ であるから



$DP_{n+1}:DP_n=a:(a+x_n)$

$DP_{n+1}:DP_n=P_{n+1}Q_{n+1}:P_nQ_n=x_{n+1}:x_n$ であるから

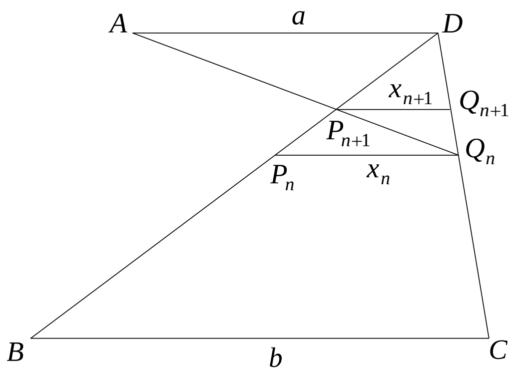
$x_{n+1}:x_n=a:(a+x_n)$　$(a+x_n)x_{n+1}=ax_n$　$\therefore x_{n+1}=\dfrac{ax_n}{a+x_n}$

両辺の逆数をとると　$\therefore \dfrac{1}{x_{n+1}}=\dfrac{a+x_n}{ax_n}=\dfrac{1}{x_n}+\dfrac{1}{a}$　$\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{a}(n-1)$

$x_0=b$ とすれば、$x_1=\dfrac{ab}{a+b}$ であるから　$x_1=\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

これより　$\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}n=\dfrac{a+bn}{ab}$　$\therefore x_n=\dfrac{ab}{a+bn}$　……(答)

(2)



△DBC の高さを h とすると、△DP_nQ_n の高さは $\dfrac{x_n}{b}h$ である。

△DP_nQ_n の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot x_n\cdot\dfrac{x_n}{b}h=\dfrac{{x_n}^2h}{2b}$

$DP_{n+1}:P_{n+1}P_n=a:x_n$ より　$F_n=\dfrac{{x_n}^2h}{2b}\times\dfrac{a}{a+x_n}=\dfrac{a{x_n}^2h}{2b(a+x_n)}$

$x_{n+1}=\dfrac{ax_n}{a+x_n}$ より

$$F_n=\frac{x_nx_{n+1}h}{2b}=\frac{h}{2b}\cdot\frac{ab}{a+bn}\cdot\frac{ab}{a+b(n+1)}=\frac{a^2h}{2}\left(\frac{1}{a+bn}-\frac{1}{a+b(n+1)}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}F_k=\frac{a^2h}{2}\left\{\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+2b}\right)+\left(\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{a+3b}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a+bn}-\frac{1}{a+b(n+1)}\right)\right\}=\frac{a^2h}{2}\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+b(n+1)}\right)$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}F_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a^2h}{2}\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+b(n+1)}\right)=\frac{a^2h}{2(a+b)}$$　……(答)