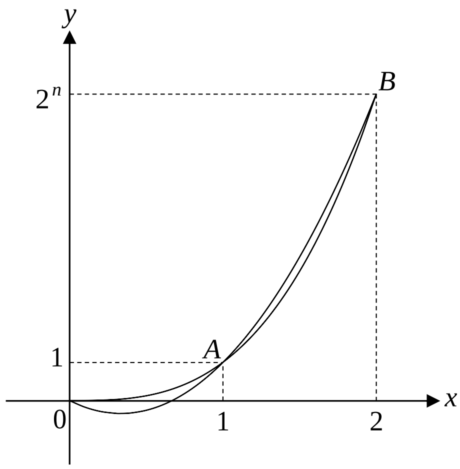
1963 年東大理 $\boxed{6}$

$y=f(x)$ のグラフは、原点 O を通るから、 $f(x)=px^2+qx$ とおく。

$f(1)=1$ より　 $p+q=1$ ――①　 $f(2)=2^n$ より　 $4p+2q=2^n$　 $2p+q=2^{n-1}$ ――②

①　②より　 $\therefore p=2^{n-1}-1,\ q=-2^{n-1}+2$　 $n=2$ のとき、 $f(x)=x^2$ であるから、$n \geqq 3$ である。



$S_1=S_2$ となるとき、$\int_0^1\left\{x^n-f(x)\right\}dx=\int_1^2\left\{f(x)-x^n\right\}dx$ であるから

$$\int_0^1\left\{x^n-f(x)\right\}dx-\int_1^2\left\{f(x)-x^n\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left\{x^n-f(x)\right\}dx+\int_1^2\left\{x^n-f(x)\right\}dx=\int_0^2\left\{x^n-f(x)\right\}dx=0$$

$$\int_0^2\left\{x^n-f(x)\right\}dx=\int_0^2\left\{x^n-(2^{n-1}-1)x^2+(2^{n-1}-2)x\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{2^{n-1}-1}{3}x^3+(2^{n-2}-1)x^2\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{n+1}2^{n+1}-\frac{8(2^{n-1}-1)}{3}+4(2^{n-2}-1)$$

$$=\frac{1}{n+1}2^{n+1}-\frac{2}{3}\cdot 2^{n+1}+\frac{1}{2}\cdot 2^{n+1}+\frac{8}{3}-4=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{6}\right)2^{n+1}-\frac{4}{3}=0$$

$$\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{6}\right)2^{n+1}=\frac{4}{3}\qquad \left(\frac{6}{n+1}-1\right)2^{n+1}=8\qquad \frac{5-n}{n+1}\cdot 2^n=4>0$$

$5-n>0$ より　 $n<5$　 $n=3,\ 4$ に限られる。

$n=3$ のとき　 $\frac{5-3}{3+1}\cdot 2^3=\frac{2\cdot 8}{4}=4$　 $n=4$ のとき　 $\frac{5-4}{4+1}\cdot 2^4=\frac{16}{5}\neq 4$

以上により、$S_1=S_2$ となるとき　 $\therefore n=3$ ……(答)