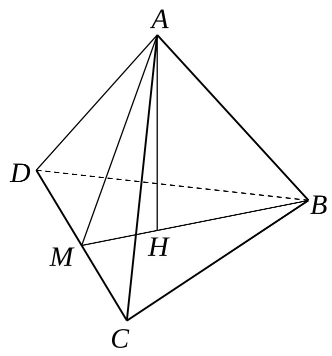
1963年東大理 $\boxed{4}$ 文 $\boxed{4}$ 共通



頂点 A から正三角形 BCD に下ろした垂線の足を H 、辺 CD の中点を M とすると、 H は BM 上にあり、 $BH:HM=2:1$ であるから

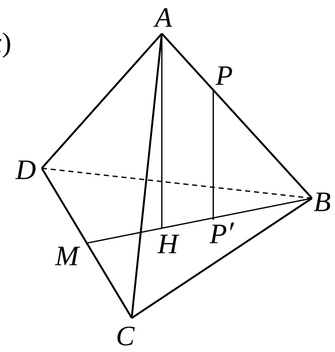
$$AM=BM=\frac{\sqrt{3}}{2}a \qquad HM=\frac{1}{3}BM=\frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$AH^2=AM^2-HM^2=\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{12}a^2=\frac{2}{3}a^2 \qquad \therefore AH=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$AP=x\,(0<x<a)$ とする。

AB 上の点 P から正三角形 BCD に下ろした垂線の足 P' は、線分 BH 上にある。 $BP=a-x$ より

$$BP:BA=PP':AH \qquad (a-x):a=PP':\frac{\sqrt{6}}{3}a \qquad aPP':\frac{\sqrt{6}}{3}a(a-x) \qquad \therefore PP':\frac{\sqrt{6}}{3}(a-x)$$



正三角形 PQR の面積は、 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ であるから、三角柱 $PQR-P'Q'R'$ の体積は

$$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}(a-x)=\frac{\sqrt{2}}{4}(ax^2-x^3)$$

$$V'(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}(2ax-3x^2)=\frac{\sqrt{2}}{4}x(2a-3x)$$

$V(x)$ の増減は右の通りで、 $x=\dfrac{2}{3}a$ において極大である。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$	a
$V'(x)$		＋	0	－	
$V(x)$		↗		↘	

$V(x)$ を最大にする x の値は　$\therefore x=\dfrac{2}{3}a$　……(答)

(2)

$$V_0=V\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{4}{9}-\frac{8}{27}\right)a^3=\frac{\sqrt{2}}{27}a^3 \qquad V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

$$\therefore \frac{V_0}{V}=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$$ ……(答)